FRANCISCI XAVERII

AYNSCOM

ANTVERPIANI

E SOCIETATE IESV,

EXPOSITIO AC DEDVCTIO GEOMETRICA

QVADRATVRARVM CIRCVLI,

R. P. GREGORII A S. VINCENTIO

EIVSDEM SOCIETATIS;

CVI PRÆMITTITVR

LIBER DE NATVRA ET AFFECTIONIBVS

RATIONVM

AC PROPORTIONVM GEOMETRICARVM



ANTVERPIÆ,
Apud IACOBVM MEVRSIVM.
ANNO M. DC. LVI.

MARIÆ
SINE LABE CONCEPTÆ,
DEIPARÆ
SEMPER VIRGINI,
OMNIS GRATIÆ AC MISERICORDIÆ
MATRI
IN
ÆTERNI MONVMENTVM AMORIS,
SE, SVAQVE OMNIA
D. D. C.
FRANCISCVS XAVERIVS AYNSCOM
SOCIETATIS IESV.

LECTORI GEOMETRÆ.

NONVS iam annus est ex quo opus Geometricum R.P, Gregorij à S. Vincentio, quod de circuli & hyperbolæ dimensione inscribit, summo Geometriæ bono, & doctorum hominum plausu, in lucem prodiit: quod, quia non argumento tantum suo spectabile, sed incredibili materiarum varietate admirabile, adinuentionum subtilitate & demonstrationum soliditate nulli secundum, omnium in se oculos conuertit, studia excitauit, animos ad scribendum dedit. fuere, qui illud, sæculi vnius laborem estimarent: alij, tanti operis Auctorem, in Conicis quidem Magno illo Apollonio, in solidis Archimede non minorem, in cæteris verò, etiam non datâ quadraturâ, nulli parem iudicabant: quæ licet sint verissima, ea tamen viri est modestia, vt huiusmodi encomia nunquã sine rubore audiat aut legat; ea animi iudiciique etiam in rebus propriis æquitas, vt non solum quadraturas suas examinari, oppugnari non ægre ferat, sed vt veritas elucescat magis, plures ad scribendũ animarit ipse, & scriptis ad eos litteris hortatus sit. Porro eos, spartam illam qui suscipere, in duas classes distinctos video. alij, quod Auctor per nouas dissimilium rationum proportiones, & proportionum proportionalitates, viam sibi ad quadraturas sternat; totum quod de proportionibus est argumentum, acsi hoc saluo, salua quoque consistat quadratura, aut euerso, & illa sit euersa, sibi examinandum assumpsere: alij relictis proportionibus, & illarum veritate suppositâ, propius ipsam aggressi quadraturam, propositiones illas examini subiecere à quibus illa immediatè dependet. Qua in re, solidius reliquis, versati sunt, Clariss. Dominus Christianus Hugenius, Eruditissimique viri, Adrianus Auzotius, Alexius Syluius, & R.P. Vincentius Leotaudus S.I. Geometra egregius: qui licet spe suâ falsi, & scopum quem spectabant vnicè, minime

me attigere, vt ſequentes edocebunt libri, eâ certe in re geometrica verſati ſunt methodo, quæ Geometras decet. vnde illorum conatus Auctori non ſolum nôn diſplicuit, vt multum ſe debere illis fateatur perlubenter: ego certè, totum huius operis argumentum, iiſdem debere me, nunquam diffitebor: in quo, quid potiſſimum ſpectarim, quid à me factum ſit, paucis accipe.

Rationum ac proportionum geometricarum natura & affectiones, primi libri argumentum eſt: quod quidem more Euclidæi elementi, continuatâ propoſitionum ac demonſtrationum ſerie, omiſſis controuerſis, deductum voluiſſem, ſed quia in hac parte iis debitor eram, qui non tantum librum octauum operis Geom. qui de proportionibus agit, ſed Euclidem & totam antiquorum Geometriam, euertere conati ſunt, veram antiquorum de proportionibus doctrinam ita ſtabilire debui, vt illi oppoſitæ adeoque falſæ, fundamenta penitus eâdem operâ conuellerem.

Primam quadraturam iuxta Auctoris mentem & genuinum ſenſum exponit liber ſecundus; oſtenditque, quid, & quâ methodo ex partialium rationum æquimultiplicatione, de totalibus, & ab his, pro quadratura inferri & legitime concludi poſſit ac debeat: dein omnibus ſatisfacit argumentis quibus prima auctoris quadratura, impetita fuit.

Quadraturas reliquas tres, totidem ordine complectuntur libri: in his, illud potiſſimum ſpectaui, vt nullas adferrem propoſitiones, quæ circulo ad quadrum reducendo neceſſariæ non eſſent: illarum præcipuam & fundamentalem, quæ ordine tertia eſt, nouâ demonſtratione ſtabiliui: tum vbi ſolida ex ductu partium parabolicarum in ſeipſas, vel in alias, tam ſubalterno quam ordinato orta, ad nota paralelopipeda, & partes cylindricas determinatam habentes baſim & altitudinem reduxi, ſcholia & lemmata adiungo, ſequentibus neceſſaria: ad hæc, quia datâ æqualitate proportionum duarum, quam au-

ctor duplici aliâ viâ propoſ. 61 & 62, demonſtrarat, difficile multis viſum eſt, quadraturam vlterius deducere, & ex illâ dato circulo, quadratum exhibere æquale, quâ potui breuitate, & in re perdifficili claritate id præſtare conatus ſum. denique argumenta omnia (quæ quidem momenti alicuius ſunt & ad manus noſtras deuenerunt) contra quadraturam ſecundam, à variis allata, diſſoluo; quod rectenè à me factum ſit, an ſecus, Tuo lector iudicio committo, geometricum id modo ſit.

FACVL-

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS.

EGo infrascriptus Societatis IESV per Flandro-Belgicam Præpositus Prouincialis, potestate ad hoc mihi factâ ab admodum R. P. Goswino Nickel Præposito Generali eiusdem Societatis, concedo facultatem typis mandandi librum cui titulus: *Expositio ac deductio Geometrica Quadraturarum Circuli R. P. Gregorij à S. Vincentio; cui præmittitur liber de natura & affectionibus rationum ac proportionum Geometricarum*, Auctore P. Francisco Xauerio Aynscom eiusdem Societatis, à viris eruditis approbatum. In quorum fidem has manu meâ subscriptas & officij mei sigillo munitas dedi. Antuerpiæ 23. Maij 1656.

THOMAS DEKENS.

APPROBATIO CENSORIS.

LIbrum hunc compositum à R.P. FRANCISCO AYNSCOM Societatis IESV, tanquam nihil continentem Religioni nostræ orthodoxæ contrarium, aut moribus, sed vt vtilem scientiæ ipsius, quam tractat, amatoribus approbo, & prælo dignissimum censeo. Datum Antuerpiæ 3. Iunij An. 1656.

Christianus Voochts Archipresbiter
Antuerp. lib. Censor.

SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS *Dei gratiâ Hispaniarum & Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Austriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Serenissimus Belgarum Princeps, diplomate suo Regio sanxit, ne quis citra* Iacobi Meursij *Typographi Antuerpiensis, voluntatem*, opus Geometricum R. P. Francisci Aynscom Soc. IESV *intra* 12. *annos proximos imprimat, aut alibi locorum impressum in hanc prouinciam importet, venaleue exponat. Qui secus faxit, confiscatione dictorum librorum, & aliis grauibus pœnis multabitur: sicuti latiùs patet in litteris datis Bruxellæ, anno Domini* 1656. 23. *Aprilis.*

Signat

Loyens.

LIBRI PRIMI

PRÆFATIO.

CVm ea quæ de rationibus est doctrina, non multis nota, atque à paucioribus exculta fuerit, innumeris implexa difficultatibus, ac natiuis quasi inuoluta tenebris hucusque latuit: & ea quidem quam à primis Geometris accepimus, tota æquales inter similesve rationes stetit, vlterius nihil ausa aut potens. Staretque etiamnum illis inclusa limitibus Geometria, nisi illos PLVS VLTRA *vectus Auctor meus, dissimilibus perinde ac similibus docuisset vti. Quam illi debitam laudem, nec ipsa si velit auferre possit inuidia. Porro rationum materia, si qua alia in tota Geometria, tenera est, & erroribus obnoxia: vnde mihi ne contingat idem, quod non paucis accidisse video, qui tritâ relictâ viâ, dũ nouas inuestigant & sequuntur semitas, in præcipitia tandem, & eo quo nolint ipsi, euadunt; ita totum hoc quod de rationibus est argumentum, tractare institui, vt ne latum quidem vnguem, à probatis antiquorum discedam principiis: magnum in hoc secutus Geometram P. Gregorium à S. Vincentio, Præceptorem meum, qui in vasto, illo & egregio, quod de quadraturis inscripsit, opere, nullum vspiam principium inducit nouum, ab Euclide nusquam & Archimede recedit. In præcipiti stat omnis nouitas, & ad lapsum vergit, nisi quo fulciatur, habeat.*

DE NATVRA RATIONVM

CAPVT PRIMVM.

PARS PRIMA.

Quid Ratio, & an ſit vera quantitas.

EVclides lib.5. Element: Rationem his definit verbis: *Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis, mutua quadam ſecundum quantitatem habitudo.*

Dicitur 1. *Eiuſdem generis*: id eſt, quæ ſub eodem ſunt quantitatis genere, quia quæ ſub diuerſo ſunt, nullo modo inter ſe comparari poſſunt; eo quod in illis oulla ſit radix fundaudi mutuam habitudinem. Sic linea conferri nequit cum ſuperficie; neque hæc cum corpore, cubitus cum mina, chœnix cum cotyla, album cum dulci.

Dicitur 2. *Secundum quantitatem*, id eſt ſecundum quod vna maior eſt alterâ, aut minor, aut illi æqualis: propoſitis enim duabus eiuſdem generis quaotitatibus, neceſſe eſt vnam maiorem minoremúe eſſe alterâ, aut huic æqualem: porro illa habitudo, quâ ſeſe vel æqualiter, quando ſunt æquales, reſpiciunt, vel inæqualiter, quando illarum altera, maior aut minor eſt reliquâ, appellatur Ratio.

Hinc à Ratiooibus exclude omnes alias habitudines ſeu relationes quæ non fundantur in quantitate: quales ſunt eæ, quæ fundantur in actione & paſſione, vt Patris ad filium, Heri ad ſeruum; & quæ fundantur in qualitate, vt albi ad album, dulcis ad dulce &c.

Rationem, veram eſſe quantitatem, negat Petrus Nonnius cap.7. *eo quod*, inquit, *neque ſit diſcreta vt numerus, neque continua, cum non ſit extenſa vt linea, ſuperficies* &c. Sed auctor ille non aduertit, rationibus proprietates quaotitatis, & id omne conoenire, propter qood lineæ, ſuperficies, corpora, Geometriæ ſunt obiectum, adeoque rationibus veram quantitatis ineſſe eſſentiam: nam vt recte Ariſtoteles *cap.6. Catagor. quanti maximè proprium eſt, æquale, & inæquale dici.* Atqui ratio vna, à Geometris tam antiquis quam recentioribus, demonſtratur maior aut minor alterâ, aut hoic æqualis, eadem igitur rationibus quæ primariis tribus quaotitatibus, proprietas coouenit. Fuſius idem probat auctor oper. Geom. lib.8. de fin.2. his verbis. *Porro contemplationem eam omnem, quæ circa rationum proportiones, denominatoreſque verſatur: ad veram pertinere Geometriam, de qua demonſtrationes illa ſuas, non ſecus ac de ſimplicibus quantitatibus formare poſſit, extra controuerſiam eſſe debet. quæ res vt clarius intelligatur, ſciendum eſt, non ſolum lineas, ſuperficies, & corpora ad Geometriam ſpectare, ſed id omne cui conuenit eadem ratio, propter quam linea, ſuperficies & corpora à Geometra tractari poſſunt. Lineæ enim, ſuperficies & corpora, non minus ad phyſicam cōtemplationem, imo metaphyſicam pertinent, ſecundum conſiderationes illis proprias, quam ad Geometriam; quæ in lineis, ſuperficiebus & ſolidis nil aliud contemplatur, quam de-*

ductionem quantitatis; secundum quam linea, superficies & solida inter se comparantur, quatenus vna maior, vel minor alterâ, aut alteri æqualis est, aut vna per alteram multiplicari, vel vna alteri addi, aut ab alia demi potest: quæ omnia circa æqualitatem aut inæqualitatem versantur: vnde omnes res physicæ, prout huic considerationi sunt subiectæ, ad Geometriam non minus spectant, quam tres primariæ species quantitatis: nam temporis duratio, motus affectiones, ponderum momenta & sexcenta alia, secundum easdem considerationes, Geometricis Theorematis subiecta sunt; quare cum rationes quantitatum inter se partim sint æquales, partim inæquales, ac proinde vna alteri æqualis, alia vero maior aut minor alterâ, cumque minor ratio à maiori tolli queat, & ratio per rationem multiplicari, & ratio rationi addi &c. necessario concluditur rationum notitiam ad Geometriam plane spectare, atque sola quantitas ad Geometriam spectat, & eiusdem est obiectum. rationes igitur æque ac tres primariæ, linea, superficies, corpus, veræ sunt quantitates.

Ad argumentum Petri Nonnij, dico, rationes esse de genere quantitatum relatiuarum, *quæ simul sunt cognitione, & quarum tota essentia est ad aliud vt ait Arist.* & rationales quidem, quarum denominatores numeris exprimi solent, pertinere suo modo ad quantitatem discretam, irrationales vero, quarum denominatores, quantitate continua solent exprimi, spectare ad quantitatem continuam.

Rationem duarum magnitudinum ab earundem interuallo seu differentia, recte distinguunt Eratostenes, Theon, aliique: à binario enim ad vnitatem, & ab vnitate ad binarium, vnum & idem est interuallum, ratio autem diuersa; binarij enim ad vnitatem ratio est dupla, vnitatis vero ad binarium, subdupla. Ratio assertionis est, quod differentia, sit comparatio quantum terminus differat à termino, ratio vero, quoties terminus in termino contineatur.

Ratio vniuersim diuiditur 1. in rationalem & irrationalem. Rationalis illa dicitur, quæ existit intra magnitudines commensurabiles, adeoque numeris exprimi potest: irrationalis, cuius termini sunt incommensurabiles, & numeris exprimi non potest.

Diuiditur 2. in rationem æqualitatis & inæqualitatis. æqualitatis ratio est quando magnitudines quæ inter se comparantur æquales sunt: inæqualitatis, quando illæ inæquales sunt.

Inter irrationales nulla datur ratio æqualitatis, prout ex vtriusque definitionibus certum est. Vnde mala & vitiosa est rationis subdiuisio, Recentioris cuiusdam in Euclide suo parte 3. lib. 5. element. dicentis, *vtramque* (nimirum rationem rationalem & irrationalem) *diuidi in rationem æqualitatis & inæqualitatis*. Falsum est enim rationem irrationalem diuidi in rationem æqualitatis & inæqualitatis, vt vel ipsis tyronibus notum est.

Ratio inæqualitatis siue rationalis, siue irrationalis fuerit, vlterius subdiuiditur in rationem maioris inæqualitatis & minoris inæqualitatis. maioris inæqualitatis est, cuius antecedens est maius consequente; minoris vero illa, cuius antecedens, consequente minus est.

Cæteras diuisionum subdiuisiones, & subdiuisionum diuisiones, videre est passim apud Auctores, Theonem, Boetium, Volumnium, Iordanum, Nonnium, Tartagliam, Tonstallum, Henischium, Clauium &c.

PARS SECVNDA

Reiiciuntur errores Marci Meybomij.

CLara hæc sunt omnia & ab antiquis primisque Geometriæ auctoribus tradita, & tot sæculorum summorumq; virorũ auctoritate ac diligenti examine confirmata. Repertus tamen hoc anno est Marcus Meibomius (quem Euthymij nomine, ita enim in dialogismo suo vocari voluit, deinceps compellabo) isque, quod mirere, non Geometra aut philosophus, sed inferioris subsellij Grammaticus, qui non præclaros modo huius sæculi Geometras, sed ipsam antiquitatem totã, illique coæuos viros doctissimos, inscitiæ, tanquam quid esset ratio penitus ignorarint, accusare ausus est.. idque adeo nulla de causa, vt vel ipsa illius verba proferre pudeat; proferam tamen, vt omnes intelligant, quantum in aliis maioris momenti rebus fidendum illi, qui in re obuia ipsisque adeo Geometriæ tyronibus nota ac manifesta, tam pueriliter hallucinatus est.

Pag. 83. ita scribit: *ex his veterum auctorum locis euidens est quid sit ποσὸν quotum, & ποσότης quotitas: item πηλίκον quantum & πηλικότης quantitas: iam videamus quomodo in rationis definitione, hoc vocabuli locum habeat: duobus autem modis vsurpari potuit:*

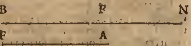
Vel enim vt relationem illam duarum magnitudinum spectandam innueret in quoto continuo seu quantitate & magnitudine, non autem in quoto discreto seu quotitate & multitudine: &c.

Vel vt significaret, infinitas magnitudines ab hac comparatione esse exclusas.

Tum reiecta posteriori hac explicatione, priorem confirmat his verbis: *quare vocabulum πηλικότης illo fine non adhibuit, sed alio: ne scilicet sinistre in numero illa relatio spectaretur: vt factum ab Eutocio, Theone & aliis: &c. deinde in eo grauiter peccat doctus alioqui scholiastes, quod has voces κατὰ πηλικότητα secundum quantitatem, cum magnitudinum notione coniungendas putat, cum Euclides ipse relationis notioni illas adiunxerit:* &c.

Itaque sola prior explicatio vera est: hoc enim voluit Euclides; secundum quãtitatem capiendam esse hanc relationem, non autem secundum quotitatem: seu in quoto continuo vel in quantitate seu magnitudine continua spectari relationem illam, non autem in quoto discreto seu numero.

Sint exempli gratia, duæ lineæ BF, FA, quarum maior BF referatur ad minorem FA: itaque quæro quoto seu quota parte minoris AF, maior



FB illam superet: respondere possum τοσῷδε πηλίκῳ tanto quanto: vel quod commensurabiles sint magnitudines τοσῷδε ποσῷ tanto quoto. si vero ratio BF ad FA sit ineffabilis, non possum dicere τοσῷδε ποσῷ: recte autem dicam τοσῷδε πηλίκῳ, tanta quantitate v.g. FN; seu vt cum Euclide loquar κατὰ πηλικότητα FN: quare τὸ quantum semper exhibere possumus, quotum autem non nisi cum rationis magnitudines sunt commensurabiles.

Vult igitur hæc Grammatici sententia, definitionem rationis ab Euclide datam, iis tantum conuenire quantitatibus, de quibus dici potest: *vna alteram superat, πηλικότητι, certa magnitudine v.g. FN, vel τοσῷδε πηλίκῳ, tanta quantitate v.g. FN, vel κατὰ πηλικότητα, secundum quantitatem FN;* (quæ vltima verba male Grammaticus vertit, *in quantitate: pag. 89.*) aliis vero

magnitu-

magnitudinibus de quibus dici poteſt: *vna alteram ſuperat τοσῷδε πόσῳ tanto quoto, vel ποσότητι, quotitate, &c. non conuenire*: ſiue breuius, vult definitionem illam tantum conuenire quantitatibus continuis, non autem diſcretis ſeu numeris.

Sed ille ſi vel Ariſtotelem vel philoſophorum vllum legiſſet & intellexiſſet, ſciret vtique quid ſit, res duas ſecundum quantitatem comparare, nec tam puerilem de græcula voce litem moueret: de re, Geometræ, non de voce diſceptant: Ariſtoteles Catagoriæ, ca. 6. de quanto: τοῦ δὲ ποσοῦ τὸ μέν ἐστι διωρισμένον τὸ δὲ συνεχές. *quanti autem aliud eſt diſcretum, aliud vero continuum*. tum vbi proprietates aliquas *quanti* numerauit: num. 26. præcipuam *quanti* affectionem his verbis explicat. ἴδιον δὲ μάλιστα τοῦ ποσοῦ, τὸ ἴσον τε καὶ ἄνισον λέγεσθαι. *Sed maxime proprium eſt quanti, æquale & inæquale dici: dictorum (pergit ibid.) enim quantorum vnumquodque dicitur æquale & inæquale: vt corpus dicitur æquale & inæquale, numerus quoque & tempus dicitur æquale & inæquale: cætera vero quæ non ſunt quanta, non vtique videntur æqualia & inæqualia dici: ſic album, æquale & inæquale non dicitur, ſed potius ſimile vel diſſimile*:

Hinc manifeſtum eſt 1. duo quanta inter ſe conferre ſecundum quãtitatem, nil aliud eſſe, quam illa inter ſe comparare ſecundum æqualitatem vel inæqualitatem:

Manifeſtum eſt 2. numeros æque ac magnitudines continuas, ſecundum quantitatem, id eſt ſecundum æqualitatem & inæqualitatem, interſe conferri poſſe:

Manifeſtum eſt 3. vocabulum τὸ ποσὸν (quod grammaticus ipſe fatetur) æque ſumi pro *quanto*, ac pro *quoto*, item ποσότης pro quotitate ac quantitate: vnde nil ad rem facit quod pag. 88. contra Clauium ſcribit his verbis: Hunc (id eſt Commandinum) ſecutus Clauius, *ſecundum quantitatem*, explicat, *ſecundum quod vna maior eſt quam altera, vel minor, vel æqualis*: quod æque verum eſſet ſi pro κατὰ πηλικότητα Euclides dixiſſet, κατὰ ποσότητα: quin imo ſi plane hæc verba omiſiſſet: nil inquam hæc vrgent: quia ποσότης æque quantitatem ſignificat ac πηλικότης, adeoque perinde omnino fuiſſet, vtrâ voce Euclides fuiſſet vſus: quod autem addit verba illa plane potuiſſe omitti, falſum eſt: definitio enim, omiſſis illis verbis æque relationes ſecundum qualitatem ac ſecundum quantitatem complecteretur, cum tamen tam illas quam omnes alias relationes quæ non fiunt ſecundum quantitatem, à ratione, excluſas voluerit Euclides.

Pag. 110. rationes quarum antecedentes termini maiores ſunt conſequentibus, vocat *exceſſiuas*, illas vero quarum antecedentes termini minores ſunt conſequentibus, *defectiuas*: aitque illas *inepte* à recentioribus vocari rationes maioris & minoris inæqualitatis.

Scio equidem vocabula illa maioris & minoris inæqualitatis à latinis auctoribus inuenta eſſe, quorum loco græci vtebantur μείζονες, ἐλάττονες, *maiores, minores*: ſed aptiſſime illud & prudentiſſime ab illis factum aſſero: cum enim inter rationes μείζονες, aliæ ſint maiores, aliæ minores, idemque accidat inter rationes ἐλάττονες, ad vitandam confuſionem, rationes μείζονες, maluerunt vocare rationes *maioris inæqualitatis*, quam ſimpliciter *maiores*: & rationes ἐλάττονες, *minoris inæqualitatis* quam *minores*.

Deinde, vnde Tibi Grammatice auctoritas, rationes quas Græci maiores & minores dixerunt, latini vero vnanimi conſenſu, maioris & minoris inæqualitatis, mutatis nominibus, contra omnem antiquitatem, & vſum latinorum, vocandi rationes exceſſiuas & defectiuas? ſcilicet hoc

ius

ius assumunt Grammatici, interpunctiones, voces, rerum omnium nomina pro libitu immutare, augere, minuere, alios vero si illorum vel vnū, ex ratione fecerint, ineptię arguere.

Videte modo ageometricam rationis diuisionem: pag. 13. *Rationem porro summa & generali diuisione in aequalem & inaequalem veteres distribuere. aequalis ratio spectatur, cum eorum quae inter se comparantur, alterum nec superat id ad quod comparatur, nec ab eo deficit: vt 2. ad 2. &c. at inaequalis ratio per subdiuisionem secatur in maiorem & minorem: maior ratio secunda subdiuisione in quinque species subdiuiditur: alia enim est multiplex* &c.

Inepta inquam & ageometrica haec est diuisio: vbi enim ratio rationalis & irrationalis? an maior ratio irrationalis secunda diuisione in quinque species diuiditur? an vlla irrationalis, multiplex, super particularis &c?

CAPVT SECVNDVM.

Inter quas magnitudines detur ratio.

QVaestionem hanc definit Euclides lib. 5. de fin. 5. his verbis: *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicata sese mutuo superare.*

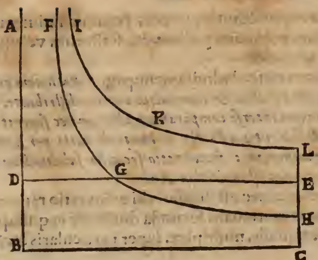
Hoc est, illę magnitudines dicuntur inter se habere rationem, quarum vtrauis aliquoties sumpta, ita augetur, vt alteram superet: quod solùm iis conuenit quantitatibus, quae sub eodem genere sunt quantitatis.

Quamuis clara haec sit definitio, nec vllam apud Geometras difficultatem habeat, questiunculae tamen ex ea oriuntur nonnullae, quas paucis expedire, visum operae pretium est.

Quaestio 1. An rectum inter & curuum detur vlla ratio: sed quantum ad curua non circularia, solutio facilis est, demonstrat enim Archimedes, parabolam sesquitertiam esse trianguli maximi inscripti. Auctor item operis Geom. praeter parabolam tam conuexam quam concauam, quadrauit superficiem portionis cylindricae, quam vngulam vocat, eiusdemque portionis cubauit solidum. Porro rectitudo & curuitas non faciunt quantitates differre specie, sed figura tantum; curua autem circularia cum figuris rectilineis conferri posse, praeter auctorem operis Geom. hactenus demonstrauit nemo.

Quaestio 2. An inter duas magnitudines quarum vna finita est secundum omnes dimensiones, altera vero infinita, dari possit vlla ratio. Hanc ipsa Euclidis soluit definitio: quantumcunque enim finita augeatur quantitas, nunquam aequabit, multo minus superabit infinitam, quod tamen iuxta definitionem, posse fieri requiritur. nulla igitur illas inter magnitudines dari potest ratio.

Quia vero concipi possunt superficies & solida quae secundum vnam dimensionem infinita sunt, secundum reliquas vero finita, quaeritur vtrum eiusmodi superficies & solida, cum aliis, quae secundum omnes dimensiones finita sunt, comparari possint. Respondeo non solùm comparari, sed qualis inter illas sit ratio, determinari posse. & de superficiebus quidem id egregie demonstrat auctor oper. Geom. li. 6. propos. 139. cuius huiusmodi est constructio. *Sint AB, CB, item AD, ED asymptoti, hyperbolarum FGH, IKL aequalium & similium, sic constituta, vt DE, CB sint paralelae, & AD, sit pars lineae AB. ducaturque EC quaeuis paralela DB, occurrens hyperbolis in*



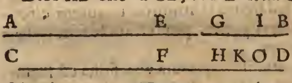
L & H. dico paralelogrammo ECDB, æquari superficiem infinite extensam, hyperbolis IKL, FGH interceptam. Idem de solido acuto Hyperbolico demonstrat Euangelista Torricellio, Geometra egregius.

Quæstio 3. Est de angulis contingentiæ, an nimirum illos inter detur vlla ratio. Censet P. Gregorius in oper. Geom. in explicatione principij primi lib. 8. nullum angulum siue rectilineus aut curuilineus, siue mixtus fuerit, præcise vt angulus est, seu duarum linearum inclinatio, esse quantitatem, sed aliquid ad quantitatem spectans, quale est, figura: de quo principio recens quidam auctor in Euclide suo in scholio ad propos. 16. lib. 3. tanquam à se tandem inuento, nulla P. Gregorij ex quo desumpsit facta mẽtione, mirifice sibi gratulatur: ego de principij illius veritate hic non disputo, illud solum affero; si anguli mixtilinei semicirculorum & anguli contingentiæ, veræ sint quantitates, adeoque inter se aut cum angulis rectilineis comparabiles; tam illos quam hos inter se esse æquales. Quod sequentibus propositionibus Geometricè demonstro.

PROPOSITIO I.

Sint duæ quantitates AB, CD, à quibus auferri possint partes æquales AE, CF, non minores dimidiis totarum AB, CD, & rursum à residuis EB, FD auferri possint partes æquales EG, FH non minores dimidiis ipsarum EB, FD, atque hoc semper possit fieri.

Dico quantitates AB, CD æquales esse, siue quod idem est Dico AB esse ad CD, vt AE est ad CF.



Si enim non sit AB ad CD vt AE ad CF, sit ratio AB ad CD minor ratione AE ad CF, fiatque vt AE ad CF ita AB ad CK: erit CK minor quam CD vt patet ex elementis. Quoniam ex AB, CD auferuntur partes æquales & non minores dimidiis ipsarum AB, CD, idemque fiat in residuis &c. potest ea ablatio partium tamdiu continuari, vt in CD relinquatur pars OD datâ quantitate, adeoque ipsâ KD, minor. intelligatur id factum esse per ablationem v. g. trium terminorum CF, FH, HO, quibus iuxta mentem propositionis totidem æquales ablati sint ex AB, nimirum AE, EG, GI. erit igitur vt AE ad EG ita CF ad FH, & vt EG ad GI, ita FH ad HO, adeoque permutando vt AE ad CF, ita EG ad FH, & vt EG ad FH, ita GI ad HO, igitur per. 12. 5. Euclidis, omnes AE, EG, GI hoc est AI, sunt ad omnes CF, FH, HO id est CO, vt prima AE est ad primam CF: sed vt AE ad CF ita per constructionem est, AB ad CK, igitur AB ad CK est vt AI ad CO, quod impossibile: non igitur ratio AB ad CD minor est ratione AE ad CF. similiter autem ostendetur quod non sit maior, æqualis igitur vt sit necesse est: ergo AB

est

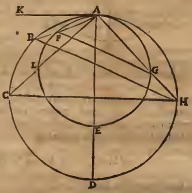
est ad CD vt AE ad CF: quæ cum ex hypothesi æquales sint, ipsæ quoque AB, CD æquales erunt, quod erat demonstrandum.

Propositio hac, corollarium est propositionis 16. lib. 2. operis Geometrici. iuxta cuius sensum, intelligi debet principium ab auctore assumptum in demonstratione æqualitatis angulorum contingentiæ.

PROPOSITIO II.

DVo circuli ABCD, AFE, ad eandem diametrum conscripti, contingant sese intus in A, diuisaque bifariam in C, semiperipheria ACD, bisecetur residuus arcus ABC in B, tum ex A ducantur secantes, ALC, AFB.

Dico angulum rectilineum CLAD maiorem esse dimidio mixtilinei anguli CBAD: & rectilineum LAE maiorem dimidio mixtilinei LFAE. item angulum rectilineum BFAC maiorem dimidio mixtilinei BALC, & rectilineum FAL maiorem dimidio mixtilinei FAL; *ex hypothesi quod illi comparari possint.*



Ducatur AK contingens circulos in A, erit angulus KAD vel KAE rectus, & quia semiperipheria ACD bifariam est diuisa in C, erit angulus rectilineus CAD semirectus, & semiperipheria ALE bifariam diuisa in L. igitur cum rectus angulus KAD vel KAE maior sit mixtilineo CBAD vel LFAE, (est enim æqualis CBAD & KABC) erit rectilineus CAD, vel LAE maior dimidio mixtilinei CBAD vel LFAE. rursum cum arcus CBA bissectus sit in B, erit etiam arcus LFA bissectus in F.

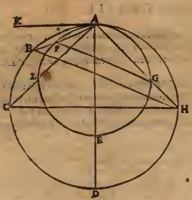
Ducatur iam quæuis secans AGH, iunganturque GF, HB; quoniam AK est contingens erit angulus rectilineus KAB vel KAF æqualis angulo AHB vel AGF per 32. tertij Euclid. quia vero arcus CB æquatur arcui BA, angulus rectilineus BAC æquatur angulo AHB, eademque de causa angulus rectilineus FAL æquatur angulo AGF: sed angulo AHB vel AGF æquatur angulus KAB vel KAF, igitur rectilineus angulus KAB æquatur angulo rectilineo BAC, vel FAL, & angulus BAC rectilineus, dimidium est anguli KAC at angulus rectilineus KAC maior est mixtilineo BAC, vel FAL igitur angulus rectilineus BAC vel FAL maior est dimidio mixtilinei BAC, vel FAL. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

PAri modo si residui arcus BA, FA per secantem bifariam diuidantur, rectilinei anguli à secante illâ & rectâ BFA contenti, maiores erunt, dimi-

dimidiis mixtilineorum à secante illa & residuis arcubus contentorum: idque semper & in omni residua bissectione arcuum, eadem enim omniũ quæ duorum primorum de quibus propositio 2. agit, ratio est & demonstratio.

PROPOSITIO III.



EAdem figurâ manente,
Dico angulos mixtilineos semicirculorum CBAD, LFAE esse inter se æquales.

Bisecetur semiperipheria ACD bifariam in C, & residuus quadrans in B, ducanturque ex A ad C & B secantes, diuident illæ semiperipheriam ALE bifariam in L, & reliquum quadrantem bifariam in F. igitur per 2. huius anguli rectilinei CAD, LAE æquales, maiores sunt dimidiis mixtilineorum CBAD LFAE: item anguli rectilinei BAC, FAL æquales inter se, maiores sunt dimidiis mixtilineorum residuorũ BAC, FAL: quod cum in omni semper subdiuisione arcuum residuorum fiat, vt ablati anguli rectilinei semper inter se sint æquales & maiores dimidiis mixtilineorum à quibus auferuntur, manifestum est per 1. huius, semicirculorum angulos CBAD, LFAE inter se esse æquales.

PROPOSITIO IV.

EAdem figurâ manente,
Dico angulos contingentiæ KABC, KAFL inter se esse æquales.

Demonstratio ex præcedentibus euidens est. cum enim æquales inter se sint recti anguli KAD, KAE, item per 3. huius æquales sint semicirculorum anguli CBAD, LFAE, patet ex axiomate 3. lib. 1. Euclidis residuos angulos contingentiæ KABC, KAFL esse inter se æquales. quod erat demonstrandum.

Ex quibus patet alterutrum admittendum esse, aut angulos omnes contingentiæ inter se æquales esse, aut illos non esse veras quantitates.

Quatuor has propositiones vnica Theorematis demonstratione cõplexus est P. Gregorius in explicatione principij primi lib. 8. & primam quidem his verbis. *Illæ sunt æquales quantitates à quibus in infinitum partes demi possunt æquales* (adde quod errore excidit) *& non minores dimidiis illarum à quibus auferuntur.* omissa 2. quæ clarior videbatur quàm vt demonstrari deberet, tertiam & quartam his complexus est verbis *: igitur quantitas anguli semicirculi CBAD, æqualis est quantitati anguli semicirculi LFAE. quare reliqui etiam anguli contingentiæ, qui complent rectum angulum, sunt inter se æquales.*

Quæ contra auctoris illud Theorema à multis allata sunt, partim ex principio illo

illo de ablatione partium æqualium in infinitum, non recte intellecto orta sunt (cui ansam forte dedere ultima verba errore omissa, quæ modo addidi) partim adeo friuola sunt ut in refellendis vel scriptionis laborem pigeat impendere: quale illud est quod Alexius Sylnius in examine Quadraturarum auctoris, contra idem Theorema attulit, quod recte arguit & refellit Generosus Dominus Godefridus Aloysius Kinner à Lovversthurn, Geometra egregius, in eleganti suo libello, quem Elucidationem Geometricam Problematis Austriaci inscribit.

Accuratius examinauit idem R.P. Vincentius Leotaud Societatis nostræ, & ipse Geometra non vulgaris: pace tamen illius dixerim, rem acu non attigit. Sic enim principium auctoris impugnat. *Si partes,* inquit, *ex vtraque quantitate demendæ eam conditionem (nimirum vt partes demendæ ex vtraque quantitate minores semper sint in infinitum quam vtraque sit quantitatum inæqualium) admittere possunt, quid tam inæquale, quod æquale probari non possit per principium allatum eo modo expositum? si enim duæ sint quantitates, vna palmaris, altera bipalmaris, quas velim probare esse inter se æquales, id perficiam; si mihi liceat partes demendas ita determinare, vt minores in infinitum semper sint quantitate palmari, si eas partes æquales ex vtraque quantitate in infinitum subtraxero: eas enim ex suppositione demere possum ex quantitate palmari, quandoquidem minores quam ea sit supponuntur: multo magis ex bipalmari eas licebit subtrahere, ergo iuxta principium allatum æquales forent quantitates palmaris & bipalmaris. quis id admittat?*

Hæc vir eruditus. at quid mirum quod ex principio non recte exposito, partibusque demendis male determinatis, non recte de totis inferatur? assumit auctor duas quantitates de quibus inquirit, æqualesne sint an inæquales; asseritque æquales esse si hanc admittant conditionem: nimirum vt ex utraque partes auferri possint, non quæuis, sed æquales inter se & non minores dimidiis totarum à quibus auferuntur, idque semper possit fieri. Videat nunc vir egregius, an quantitates (palmaris & bipalmaris) à se assumptæ, hanc conditionem vllo modo admittant: enidēs est, quod si à palmari partem auferam non minorem dimidiâ, eique æqualem auferam ex bipalmari, hanc semper minorem esse dimidiâ bipalmaris: item si ex bipalmari partem auferam non minorem dimidiâ, non posse huic æqualem auferri à palmari: vnde consequens est, ab vtrauis incipiat partium ablatio, siue à palmari siue à bipalmari, non posse seruari conditionem ab auctore requisitam, nimirum vt partes sint æquales, inter se & non minores dimidiis quantitatum à quibus auferuntur.

At auctor partes demendas tantum voluit esse æquales, conditionem alteram non requisiuit: nimirum vt non minores sint dimidiis quantitatum à quibus auferuntur: esto id explicite non fecerit (qui error est typographi vel amanuensis) implicite certe requisiuit, cum anguli rectilinei quos ex angulis mixtilineis semicirculorum aufert, non sint qualescunque, sed determinati per bissectionem semiperipheriarum, & arcuum residuorum in infinitum continuatam: qua fit vt anguli rectilinei ablati semper sint maiores dimidiis mixtilineorum à quibus auferuntur, supposito quod illi comparari inter se possint.

Hucusque de angulis contingentiæ: vlterius in illis non procedo, quod ad rem quam ago, lis illa non pertineat: sufficit ostendisse aut nullam inter illos dari rationem, adeoque non esse quantitates, aut quantitates si sint, solam æqualitatis rationē illos inter reperiri.

Quæstio 4. An anguli rectilinei sint quantitates adeoque inter se cōparabiles.

parabiles. consequenter ad priora, dico angulos rectilineos vt præcise sunt duarum rectarum inclinatio, non esse quantitates, sed modum, vel aliquid spectans ad quantitatem; comparari tamen inter se posse, prout terminati vel terminabiles sunt per communem mensuram, quæ est arcus circularis. Vnde dum Euclides cæterique Geometræ, angulum vnũ rectilineum, maiorem minoremúe dicunt altero, nil aliud volunt, quam angulum vnum, maiorem aut minorem intercipere arcum circuli quam alter in eodem circulo intercipiat.

At Euclides angulum semicirculi, & reliquum contingentiæ comparat cum angulo acuto rectilineo secundum quantitatem, aitque semicirculi angulum quouis acuto rectilineo maiorem, reliquum vero acuto omni minorem: atqui comparatio secundum maius & minus, solum potest institui inter quantitates, igitur tam anguli semicirculi & contingentiæ quam rectilinei quantitates sunt. Respondeo, Euclidem, dum ait, semicirculi angulum maiorem esse quouis acuto rectilineo, reliquum vero quouis acuto minorem, nil aliud velle, quam quod prima propositionis 16. lib. 3. dicit assertio. nimirum quod inter contingentem & peripheriam nulla recta cadere possit quin circulum secet: nullum enim fundamentum est in Geometria comparandi angulos mixtilineos cum rectilineis, cum nulla sit mensura vtrisque communis, secundum quam solam anguli qui inter se comparantur, conferri possunt.

Propositionum quatuor præcedentium vim infringere conatus est, non nemo amicus Geometra, huiusmodi scripto:

Propos. 116. de progression. (cuius corollarium est propos. 1. paulo ante à me allata) non est vera vniuersaliter, quia innititur propos. 1. lib. 10. Euclidis, in eo sensu in quo Euclides non dixit: in quem etiam errorem incidit Peletarius vt optime obseruauit Clauius in 19. lib. 3. ea enim propositio solum valet, quoties quantitates sunt tales, vt vna sæpius repetita, alteram æquet: at angulus contingentiæ vt demonstrat Euclides, cum sit minor quolibet rectilineo, minoritate diuersa rationis, non potest æquare rectilineum, quare quando assumitur in probatione dictæ propositionis, quod si auferantur partes non minores dimidio, tandem deuenitur ad aliquid minus, nego hoc posse fieri, nisi quantitates sint tales vt illud minus sit auferibile per eam diuisionem à maiori, quod non euenit in casu præsenti; imo hac demonstratio torquetur contra auctorem. demonstrabitur enim angulus rectilineus prorsus æqualis angulo semicirculi; quod est expresse contra 19. Euclidis, demonstrantis semicirculi esse maiorem quolibet rectilineo acuto, reliquum autem quouis acuto minorem: cum autem tam angulus semicirculi quam reliquus contineatur in angulo recto tanquam partes (vbi enim non datur pars & pars, non datur reliquum vna ablata, quia totum aufertur) sic demonstrabitur ex demonstratione auctoris angulus semicirculi angulo recto æqualis &c. appelletur angulus semicirculi angulus Z, & angulus rectus X, & fiat figura & constructio vt iacet ab auctore scripta: quoniam angulus EAL (vide fig. propos. 2. ante allata) non est minor dimidio tam anguli semicirculi Z, quam anguli recti X, & angulus LAF non est minor dimidio anguli rectilinei LAK, & mixtilinei LAF, & sic semper possit fieri talis diuisio, &c. sequitur quod si quid valet demonstratio cum suo corollario & illatione factâ ab hoc auctore qui demonstrationem defendit, probabitur angulum Z, esse æqualem angulo X.

Tota ratio à priori paralogismi est, quia ex vno capite si diuidatur per rectam lineam angulus rectus quacunque possibili diuisione, hæc recta nunquam cadet intra tangentem & peripheriam, sed semper cadet intra circulum, ergo non est auferibile per rectam lineam id quo angulus rectus superat angulum semicirculi. hinc

sequitur

sequitur quod si in infinitum diuidatur angulus rectus per rectas lineas, per medietates & medietates medietatum; cum hac recta linea diuidens, in quocunque casu demonstretur cadere intra circulum, semper diuidet etiam angulum semicirculi, constituens veram partem non minorem medietate illius anguli qui diuiditur per singulas diuisiones, ergo nunquam poterit deueniri per talem diuisionem à recta linea factam, vt relinquatur quo angulus rectus superat angulum semicirculi; & sic nihil prorsus valet demonstratio.

Eadem ratio est de angulo semicirculi maioris, respectu anguli semicirculi minoris; quamuis enim primus angulus sit maior secundo, tamen excessus non est auferibilis per rectam lineam: quod ab Euclide demonstratur ex propos. 19. l. 3. si enim esset auferibilis, iã esset ducibilis recta linea à puncto anguli quæ nõ caderet intra circulum minorem, adeoque esset eius tangens, & consequenter cum diametro constitueret angulum rectum, & tamen eodem recta caderet intra circulum maiorem, & consequenter cum eadem diametro non constitueret angulum rectum, & sic sequerentur duo contradictoria.

Cum ergo non sit principium per se notum, quod ab omni maiori possit detrahi minus per quamcunque lineam, & ex alio capite demonstretur ab angulo recto non esse detrahibilem angulum vllum rectilineum qui sit æqualis angulo semicirculi, cuiuscunque sit magnitudinis, sequitur ab angulo recto non posse detrahi per rectam lineam id quo superat angulum cuiuscunque semicirculi: in lineis quidem fateor si vna est maior, posse detrahi excessum quo aliam superat: at in angulis diuersæ rationis, hoc est proprium, vt non per rectam lineam detrahi possit excessus vnius respectu alterius, quamuis putem principium per se notum esse, ab omni maiori posse detrahi minus aliqua modo, & sic ab angulo recto potest detrahi angulus semicirculi per lineam circularem, quamuis non possit per rectam.

Et sane dissimulare non possum quin fatear ingenue me maxime admirari, & vix posse percipere quod Geametræ doctissimi & perspicacissimi non videant ex ipsis fere terminis, angulum semicirculi maioris, esse maiorem angulo semicirculi minoris; cum enim vnum latus vtriusque anguli sit, eadem recta linea ducta à puncto contactus & transiens per centrum vtriusque circuli, & lineæ curuæ circulorum sese contingant in vnico puncto quod est punctum anguli vtriusque, sequitur quodcunque punctum circuli maioris distare à quocunque puncto circuli minoris: adeoque esse spatium inter eo puncta, cum igitur angulus semicirculi maioris fiat ex inclinatione lineæ circularis respectu diametri, & hæc inclinatio secundum quodcunque punctum, vno excepto in ipso contactu distet extra circumferentiam minorem, quo pacto hæc inclinatio non includet plusquam inclinatio constituta à circumferentia minori, cum hæc sit infra inclinationem circumferentiæ maioris? &c. quæ ratio mihi est ita euidens, vt est euidens quod duo circuli in vnico solum puncto se possint contingere.

Hæc est ratiocinatio viri doctissimi, quâ putat demonstrationum ante allatarum vim plane à se infringi: verum hæc cuiusmodi sit, videamus.

Ac 1. suppono; inter duas magnitudines aliquam esse rationem, idem esse, ac duas magnitudines secundum quantitatem, id est secundum excessum vel defectum aut æqualitatem posse comparari: rursum illas magnitudines secundum quantitatem posse comparari, de quibus dici potest, hæc maior aut minor est illâ: vnde consequens est, magnitudines illas iuxta defin. 5. lib. 5. eiusmodi esse, vt vna aliquoties sumpta possit alteram æquare vel superare.

Atqui secundum auctorem hunc, angulus semicirculi maioris, maior est angulo semicirculi minoris, igitur anguli semicirculi, eiusmodi sunt quantitates vt vna aliquoties sumpta, possit alteram superare: igitur in

tamen recentiores nonnullos, in eum errorem delapsos video, vt totam rationum naturam, in sola multiplicatione consistere, illamque ab hac ita dependere velint, vt rationes aliter inter se conferri posse nege nt, quam secundum multiplicationem; non abs re visum est, priusqua m ad alia progrediar, errorem illum tenebrasque discutere, ne alios min us in rationum argumento versatos, vnà inuoluant.

Dico igitur recte ac legitime rationes secundum quantitatem, adeoque aliter quam secundum multiplicationem conferri inter se posse.

1. Ostensum est cap. 1. huius, rationes æque veras quantitates esse atque sunt tres primariæ, linea, superficies, corpus. ex quo illod consequens est, eas omnes rationibus affectiones deberi, quæ primariis illis quantitatibus qua talibus, conueniunt. atqui secundum omnes, aliud est duas lineas v.g. inter se conferre secundum quantitatem, hoc est secundum quod vna maior, minorúe est alterâ aut illi æqualis; aliud vero, easdem inter se conferre secundum potentias, vtraque insuper recte ac legitime instituitur comparatioı igitur & aliud est duas rationes inter se conferre secundum quantitatem, hoc est secundum quod vna maior minorúe est alterâ, aut illi æqualis, aliud easdem inter se conferre; secundum multiplicationem (quæ rationum quædam veluti potentia est): vtraque insuper recte ac legitime instituitur comparatio.

2. Certum ac indubitatum est, & vltro aduersarij concedunt, rationes aliquas dari, ita contrarij ac diuersi ordinis, vt inter se confetri nullo modo possint secundum multiplicationem. quales sunt ratio maioris & minoris inæqualitatis, prout demonstrabimus cap. 15. huius: & tamen euidens est, non minus illas inter, atque inter duas quascunque rectas lineas, certam ac determinatam dari habitudinem secundum quantitatem, cum denominatores illarum exhiberi possint, vti exhibebimus cap. 6. huius; rationes igitur aliter inter se conferri possunt ac debent, quam secundum multiplicationem.

A B C D

3. Si rationes aliter inter se conferri nequeant quam secundum multiplicationem, igitur & maioritas vnius rationis super alia; penes eandem desumenda est, illaque ratio maior alterâ dicetur, quæ eiusdem tertiæ magis est multiplicata; quod falsum & contra Euclidem. siur enim quatuor termini continue proportionales ABCD, & A quidem sit minimus; ratio A ad D triplicata est rationis A ad B, cuius duplicata tantum, est ratio A ad C; & tamen iuxta Euclidem & rei veritatem ratio A ad D minor est ratione A ad C.

A B
C D

4. Ratio multiplex v.g. dupla, tripla, quadrupla, specie differt à ratione multiplicata v.g. duplicata, rriplicata, quadruplicata &c. nam rationem v.g. A ad B duplam, rriplam esse &c. significat vel quantitatem A, bis, ter &c. per additionem continere quantitatem B, vel rationem A ad B, bis, ter &c. per additionem continere aliam rationem C ad D, siue rationem CD, sibi additam, producere rationem AB: rationē vero A ad B duplicatā, triplicatā esse rationis C ad D, significat rationē A ad B, bis, ter &c. per multiplicàtionem continere rationem C ad D, vel rationem C ad D bis, ter in se ductam, producere rationem A ad B. cum igitur specie differant, continentia vnius in alio per additionem, & continentia vnius in alio per multiplicationem, necessario etiam modı rariones secundum illas continentias comparandi specie inter se differunt: & cum ab antiquis Geometris passim vtroque

illo modo rationes inter se collatæ sint, manifestum est, rationum comparationes secundum duplicem illum modum legitimo institui.

Porro rationem triplam differre à triplicata, duplam à duplicata &c. manifestum est 1. sit A linea tripla lineæ B, erit ratio A ad B tripla: quia vero inter A & B infinitæ poni possunt mediæ proportionales, poterit ratio A ad B esse duplicata, quadruplicata, centuplicata; &c. intelligatur igitur inter A & B vna media poni proportionalis, erit ratio A ad B duplicata, & simul tripla, si duæ ponantur mediæ erit ratio A ad B triplicata & simul tripla, si tres mediæ, erit ratio A ad B quadruplicata & simul tripla & sic de cæteris. necessario igitur dupla à duplicata, tripla à triplicata & ab alia quauis multiplicata distingui debet. 2. positis quatuor continue proportionalibus 27. 9. 3. 1. ratio 27. ad 1. est triplicata rationis 3. ad 1. si quis autem illam triplam dixerit, quomodo ratio 27 ad 1. distinguetur à ratione 3. ad 1. quæ vere tripla est? scio quidem rationem 3. ad 1. respectu alicuius posse esse triplicatam, & duplam alicuius duplicatam, sed idcirco, duplam cum duplicata, triplam cum triplicata confundere si liceat, eodem iure, triplam licebit vocare quadruplam, quintuplam, centuplã, &c. cum eadem tripla ratio respectu alicuius possit esse quadruplicata, quintuplicata, centumplicata, prout plures fuerint mediæ proportionales inter extremos terminos rationis triplæ, positæ.

Denique cum nullum opinionis contrariæ apud antiquos reperire sit vestigium, imo ex illa necessario sequantur ea, quæ totam antiquorum euertunt Geometriam, nullum insuper ab erroris illius sequacibus pro ea argumentum vel ad speciem probabile, nedum geometrica adferatur demonstratio, sequitur illam inter ea habendam esse figmenta, quæ sola assertione, & nulla verisimilitudine aut probabilitate constant, adeoque merito à tota Geometria proscribendam.

CAPVT QVARTVM.

De Proportione, Medietate, Proportionalitate.

PARS PRIMA.

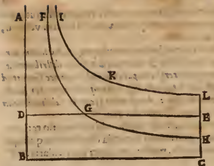
Proportio.

OStensum est capite præcedenti, rationes secundum duplicem modum inter se posse comparari, altero secundum quantitatem, hoc est secundum quod vna maior minorúe est aliâ, aut illi æqualis: altero secundum multiplicationem. de vtroque agendum deinceps: & de posteriori quidem cap. 15. huius. de priori vero, præsenti & sequentibus.

Proportio est mutua duarum rationum quarumcunque secundum quantitatem habitudo.

Dixi, *rationum quarumcunque*, quia cum rationes omnes qualescunque fuerint, æque veræ sint quantitates ac tres primariæ, datisque duabus rationibus quibuscunque, necessario vna maior minorúe sit alterâ, aut illi æqualis, sicut linea lineæ comparata, manifestum est inter quasuis duas rationes certam ac determinatam, mutuamque secundum quantitatem

dari



L & H. dico paralelogrammo ECDB, æquari superficiem infinite extensam, hyperbolis IKL, FGH interceptam. Idem de solido acuto Hyperbolico demonstrat Euangelista Torricellio, Geometra egregius.

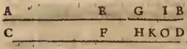
Quæstio 3. Est de angulis contingentiæ, an nimirum illos inter detur vlla ratio. Censet P. Gregorius in oper. Geom. in explicatione principij primi lib. 8. nullum angulum siue rectilineus aut curuilineus, siue mixtus fuerit, præcise vt angulus est, seu duarum linearum inclinatio, esse quantitatem, sed aliquid ad quantitatem spectans, quale est, figura: de quo principio recens quidam auctor in Euclide suo in scholio ad propos. 16. lib. 3. tanquam à se tandem inuento, nulla P. Gregorij ex quo desumpsit facta mẽtione, mirifice sibi gratulatur: ego de principij illius veritate hic non disputo, illud solum affero; si anguli mixtilinei semicirculorum & anguli contingentiæ, veræ sint quantitates, adeoque inter se aut cum angulis rectilineis comparabiles: tam illos quam hos inter se esse æquales. Quod sequentibus propositionibus Geometricè demonstro.

PROPOSITIO I.

Sint duæ quantitates AB, CD, à quibus auferri possint partes æquales AE, CF, non minores dimidiis totarum AB, CD, & rursum à residuis EB, FD auferri possint partes æquales EG; FH non minores dimidiis ipsarum EB, FD, atque hoc semper possit fieri.

Dico quantitates AB, CD æquales esse, siue quod idem est

Dico AB esse ad CD, vt AE est ad CF.



Si enim non sit AB ad CD vt AE ad CF, sit ratio AB ad CD minor ratione AE ad CF, fiatque vt AE ad CF ita AB ad CK: erit CK minor quam CD vt patet ex elementis. Quoniam ex AB, CD aufeuntur partes æquales & non minores dimidiis ipsarum AB, CD, idemque fiat in residuis &c. potest ea ablatio partium tamdiu continuari, vt in CD relinquatur pars OD datâ quantitate, adeoque ipsâ KD, minor. intelligatur id factum esse per ablationem v. g. trium terminorum CF, FH, HO, quibus iuxta mentem propositionis totidem æquales ablati sint ex AB, nimirum AE, EG, GI. erit igitur vt AE ad EG ita CF ad FH, & vt EG ad GI, ita FH ad HO, adeoque permutando vt AE ad CF, ita EG ad FH, & vt EG ad FH, ita GI ad HO, igitur per. 12. 5. Euclidis, omnes AE, EG, GI hoc est AI, sunt ad omnes CF, FH, HO id est CO, vt prima AE est ad primam CF: sed vt AE ad CF ita per constructionem est AB ad CK, igitur AB ad CK est vt AI ad CO, quod impossibile: non igitur ratio AB ad CD minor est ratione AE ad CF. similiter autem ostendetur quod non sit maior, æqualis igitur vt sit necesse est: ergo AB

est

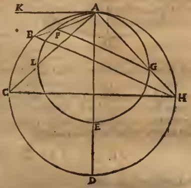
eſt ad CD vt AE ad CF: quæ cum ex hypotheſi æquales ſint, ipſæ quoque AB, CD æquales erunt,quod erat demonſtrandum.

Propoſitio hæc,corollarium eſt propoſitionis 116. lib. 2. operis Geometrici. iuxta cuius ſenſum, intelligi debet principium ab auctore aſſumptum in demonſtratione æqualitatis angulorum contingentiæ.

PROPOSITIO II.

DVo circuli ABCD, AFE, ad eandem diametrum conſcripti, contingant ſeſe intus in A, diuiſaque bifariam in C, ſemiperipheria ACD, biſecetur reſiduus arcus ABC in B, tum ex A ducantur ſecantes, ALC, AFB.

Dico angulum rectilineum CLAD maiorem eſſe dimidio mixtilinei anguli CBAD: & rectilineum LAE maiorem dimidio mixtilinei LFAE. item angulum rectilineum BFAC maiorem dimidio mixtilinei BALC, & rectilineum FAL maiorem dimidio mixtilinei FAL; *ex hypotheſi quod illi comparari poſſint.*



Ducatur AK contingens circulos in A, erit angulus KAD vel KAE rectus, & quia ſemiperipheria ACD bifariam eſt diuiſa in C, erit angulus rectilineus CAD ſemirectus, & ſemiperipheria ALE bifariam diuiſa in L. igitur cum rectus angulus KAD vel KAE maior ſit mixtilineo CBAD vel LFAE, (eſt enim æqualis CBAD & KABC) erit rectilineus CAD, vel LAE maior dimidio mixtilinei CBAD vel LFAE. rurſum cum arcus CBA biſſectus ſit in B, erit etiam arcus LFA biſſectus in F.

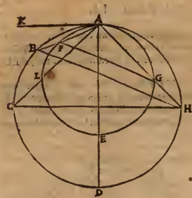
Ducatur iam quæuis ſecans AGH, iunganturque GF, HB; quoniam AK eſt contingens erit angulus rectilineus KAB vel KAF æqualis angulo AHB vel AGF per 32. tertij Euclid. quia vero arcus CB æquatur arcui BA, angulus rectilineus BAC æquatur angulo AHB, eademque de cauſa angulus rectilineus FAL æquatur angulo AGF: ſed angulo AHB vel AGF æquatur angulus KAB vel KAF, igitur rectilineus angulus KAB æquatur angulo rectilineo BAC, vel FAL, & angulus BAC rectilineus, dimidium eſt anguli KAC, at angulus rectilineus KAC maior eſt mixtilineo BAC, vel FAL igitur angulus rectilineus BAC vel FAL maior eſt dimidio mixtilinei BAC, vel FAL. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

PAri modo ſi reſidui arcus BA, FA per ſecantem bifariam diuidantur, rectilinei anguli à ſecante illâ & rectâ BFA contenti, maiores erunt, dimi-

dimidiis mixtilineorum à secante illa & residuis arcubus contentorum: idque semper & in omni residua bissectione arcuum, eadem enim omniũ quæ duorum primorum de quibus propositio 2. agit, ratio est & demonstratio.

PROPOSITIO III.



EAdem figurâ manente, Dico angulos mixtilineos semicirculorum CBAD, LFAE esse inter se æquales.

Bisecetur semiperipheria ACD bifariam in C, & residuus quadrans in B, ducanturque ex A ad C & B secantes, diuident illæ semiperipheriam ALE bifariam in L, & reliquum quadrantem bifariam in F. igitur per 2. huius anguli rectilinei CAD, LAE æquales, maiores sunt dimidiis mixtilineorum CBAD LFAE: item anguli rectilinei BAC, FAL æquales inter se, maiores sunt dimidiis mixtilineorum residuorũ BAC, FAL: quod cum in omni semper subdiuisione arcuum residuorum fiat, vt ablati anguli rectilinei semper inter se sint æquales & maiores dimidiis mixtilineorum à quibus auferuntur, manifestum est per 1. huius, semicirculorum angulos CBAD, LFAE inter se esse æquales.

PROPOSITIO IV.

EAdem figurâ manente, Dico angulos contingentiæ KABC, KAFL inter se esse æquales.

Demonstratio ex præcedentibus euidens est. cum enim æquales inter se sint recti anguli KAD, KAE, item per 3. huius æquales sint semicirculorum anguli CBAD, LFAE, patet ex axiomate 3. lib. 1. Euclidis residuos angulos contingentiæ KABC, KAFL esse inter se æquales. quod erat demonstrandum.

Ex quibus patet alterutrum admittendum esse, aut angulos omnes contingentiæ inter se æquales esse, aut illos non esse veras quantitates.

Quatuor has propositiones vnica Theorematis demonstratione cõplexus est P. Gregorius in explicatione principij primi lib. 8. & primam quidem his verbis. *Illæ sunt æquales quantitates à quibus in infinitum partes demi possunt æquales* (adde quod errore excidit) *& non minores dimidiis illarum à quibus auferuntur.* omissa 2. quæ clarior videbatur quàm vt demonstrari deberet, tertiam & quartam his complexus est verbis: *igitur quantitas anguli semicirculi CBAD, æqualis est quantitati anguli semicirculi LFAE. quare reliqui etiam anguli contingentiæ, qui complent rectum angulum, sunt inter se æquales.*

Quæ contra auctoris illud Theorema à multis allata sunt, partim ex principio illo

illo de ablatione partium æqualium in infinitum, non recte intellecto orta sunt (cui ansam forte dedere vltima verba errore omissa, quæ modo addidi) partim adeo friuola sunt vt iis refellendis vel scriptionis laborem pigeat impendere: quale illud est quod Alexius Syluius in examine Quadraturarum auctoris, contra idem Theorema attulit, quod recte arguit & refellit Generosus Dominus Godefridus Aloysius Kinner à Lovverthurn, Geometra egregius, in eleganti suo libello, quem Elucidationem Geometricam Problematis Austriaci inscribit.

Accurarius examinauit idem R.P. Vincentius Leotaud Societatis nostræ, & ipse Geometra non vulgaris: pace tamen illius dixerim, rem acu non attigit. Sic enim principium auctoris impugnat. *Si partes*, inquit, *ex vtraque quantitate demendæ eam conditionem (nimirum vt partes demendæ ex vtraque quantitate minores semper sint in infinitum quam vtraque sit quantitatum inæqualium) admittere possunt, quid tam inæquale, quod æquale probari non possit per principium allatum eo modo expositum? si enim duæ sint quantitates, vna palmaris, altera bipalmaris, quas velim probare esse inter se æquales, id perficiam; si mihi liceat partes demendas ita determinare, vt minores in infinitum semper sint quantitate palmari, si eas partes æquales ex vtraque quantitate in infinitum subtraxero: eas enim ex suppositione demere possum ex quantitate palmari, quandoquidem minores quam ea sit supponuntur: multo magis ex bipalmari eas licebit subtrahere, ergo iuxta principium allatum æquales forent quantitates palmaris & bipalmaris. quis id admittat?*

Hæc vir eruditus. at quid mirum quod ex principio non recte exposito, partibusque demendis male determinatis, non recte de totis inferatur? assumit auctor duas quantitates de quibus inquirit, æqualesne sint an inæquales; asseritque æquales esse si hanc admittant conditionem: nimirum vt ex utraque partes auferri possint, non quæuis, sed æquales inter se & non minores dimidiis totarum à quibus auferuntur, idque semper possit fieri. Videat nunc vir egregius, an quantitates (palmaris & bipalmaris) à se assumptæ, hanc conditionem vllo modo admittant: euidens est, quod si à palmari partem auferam non minorem dimidiâ, eique æqualem auferam ex bipalmari, hanc semper minorem esse dimidiâ bipalmaris: item si ex bipalmari partem auferam non minorem dimidiâ, non posse huic æqualem auferri à palmari: vnde consequens est, ab vtrauis incipiat partium ablatio, siue à palmari siue à bipalmari, non posse seruari conditionem ab auctore requisitam, nimirum vt partes sint æquales, inter se & non minores dimidiis quantitatum à quibus auferuntur.

At auctor partes demendas tantum voluit esse æquales, conditionem alteram non requisiuit: nimirum vt non minores sint dimidiis quantitatum à quibus auferuntur: esto id explicite non fecerit (qui error est typographi vel amanuensis) implicite certe requisiuit, cum anguli rectilinei quos ex angulis mixtilineis semicirculorum aufert, non sint qualescunque, sed determinati per bissectionem semiperipheriarum, & arcuum residuorum in infinitum continuatam: qua fit vt anguli rectilinei ablati semper sint maiores dimidiis mixtilineorum à quibus auferuntur, supposito quod illi comparari inter se possint.

Hucusque de angulis contingentiæ: vlterius in illis non procedo, quod ad rem quam ago, lis illa non pertineat: sufficit ostendisse aut nullam inter illos dari rationem, adeoque non esse quantitates, aut quantitates si sint, solam æqualitatis rationem illos inter reperiri.

Quæstio 4. An anguli rectilinei sint quantitates adeoque inter se cõparabiles.

parabiles. consequenter ad priora, dico angulos rectilineos vt præcise sunt duarum rectarum inclinatio, non esse quantitates, sed modum, vel aliquid spectans ad quantitatem; comparari tamen inter se posse, prout terminari vel terminabiles sunt per communem mensuram, quæ est arcus circularis. Vnde dum Euclides cæterique Geometræ, angulum vnũ rectilineum, maiorem minoremúe dicunt altero, nil aliud volunt, quam angulum vnum, maiorem aut minorem intercipere arcum circuli quam alter in eodem circulo intercipiat.

At Euclides angulum semicirculi, & reliquum contingentiæ comparat cum angulo acuto rectilineo secundum quantitatem, aitque semicirculi angulum quouis acuto rectilineo maiorem, reliquum vero acuto omni minorem: atqui comparatio secundum maius & minus, solum potest institui inter quantitates, igitur tam anguli semicirculi & contingentiæ quam rectilinei quantitates sunt. Respondeo. Euclidem, dum ait, semicirculi angulum maiorem esse quouis acuto rectilineo, reliquum vero quouis acuto minorem, nil aliud velle, quam quod prima propositionis 16. lib. 3. dicit assertio. nimirum quod inter contingentem & peripheriam nulla recta cadere possit quin circulum secet: nullum enim fundamentum est in Geometria comparandi angulos mixtilineos cum rectilineis, cum nulla sit mensura vtrisque communis, secundum quam solam anguli qui inter se comparantur, conferri possunt.

Propositionum quatuor præcedentium vim infringere conatus est non nemo amicus Geometra, huiusmodi scripto:

Propos. 116. de progression. (cuius corollarium est propos. 1. paulo ante à me allata) non est vera vniuersaliter, quia innititur propos. 1. lib. 10. Euclidis, in eo sensu in quo Euclides non dixit: in quem etiam errorem incidit Peletarius vt optime obseruauit Clauius in 19. lib. 3. ea enim propositio solum valet, quoties quantitates sunt tales, vt vna sæpius repetita, alteram æquet: at angulus contingentiæ vt demonstrat Euclides, cum sit minor quolibet rectilineo, minoritate diuersæ rationis, non potest æquare rectilineum, quare quando assumitur in probatione dictæ propositionis, quod si auferantur partes non minores dimidio, tandem deuenitur ad aliquid minus, nego hoc posse fieri, nisi quantitates sint tales vt illud minus sit auferibile per eam diuisionem à maiori., quod non euenit in casu præsenti: imo hæc demonstratio torquetur contra auctorem. demonstrabitur enim angulus rectilineus prorsus æqualis angulo semicirculi; quod est expresse contra 19. Euclidis, demonstrantis semicirculi esse maiorem quolibet rectilineo acuto, reliquum autem quouis acuto minorem: cum autem tam angulus semicirculi quam reliquus contineatur in angulo recto tanquam partes (vbi enim non datur pars & pars, non datur reliquum vna ablata, quia totum aufertur) sic demonstrabitur ex demonstratione auctoris angulus semicirculi angulo recto æqualis &c. appelletur angulus semicirculi angulus Z, & angulus rectus X, & fiat figura & constructio vt iacet ab auctore scripta: quoniam angulus EAL (vide fig. propos. 2. ante allata) non est minor dimidio tam anguli semicirculi Z, quam anguli recti X, & angulus LAF non est minor dimidio anguli rectilinei LAK, & mixtilinei LAF, & sic semper possit fieri talis diuisio, &c. sequitur quod si quid valet demonstratio cum suo corollario & illatione facta ab hoc auctore qui demonstrationem defendit, probabitur angulum Z, esse æqualem angulo X.

Tota ratio à priori paralogismi est, quia ex vno capite si diuidatur per rectam lineam angulus rectus quacunque possibili diuisione, hæc recta nunquam cadet intra tangentem & peripheriam, sed semper cadet intra circulum, ergo non est auferibile per rectam lineam id quo angulus rectus superat angulum semicirculi. hinc

sequitur

sequitur quod si in infinitum diuidatur angulus rectus per rectas lineas, per medietates & medietates medietatum; cum hæc recta linea diuidens, in quocunque casu demonstretur cadere intra circulum, semper diuidet etiam angulum semicirculi, constituens veram partem non minorem medietate illius anguli qui diuiditur per singulas diuisiones, ergo nunquam poterit deueniri per talem diuisionem à recta linea factam, vt relinquatur quo angulus rectus superat angulum semicirculi; & sic nihil prorsus valet demonstratio.

Eadem ratio est de angulo semicirculi maioris, respectu anguli semicirculi minoris; quamuis enim primus angulus sit maior secundo, tamen excessus non est auferibilis per rectam lineam: quod ab Euclide demonstratur ex propos. 19. l. 3. si enim esset auferibilis, iā esset ducibilis recta linea à puncto anguli quæ nō caderet intra circulum minorem, adeoque esset eius tangens, & consequenter cum diametro constitueret angulum rectum, & tamen eadem recta caderet intra circulum maiorem, & consequenter cum eadem diametro non constitueret angulum rectum, & sic sequerentur duo contradictoria.

Cum ergo non sit principium per se notum, quod ab omni maiori possit detrahi minus per quamcunque lineam, & ex alio capite demonstretur ab angulo recto non esse detrahibilem angulum vllum rectilineum qui sit æqualis angulo semicirculi, cuiuscunque sit magnitudinis, sequitur ab angulo recto non posse detrahi per rectam lineam id quo superat angulum cuiuscunque semicirculi: in lineis quidem fateor si vna est maior, posse detrahi excessum quo aliam superat: at in angulis diuersa rationis, hoc est proprium, vt non per rectam lineam detrahi possit excessus vnius respectu alterius, quamuis putem principium per se notum esse, ab omni maiori posse detrahi minus aliquo modo, & sic ab angulo recto potest detrahi angulus semicirculi per lineam circularem, quamuis non possit per rectam.

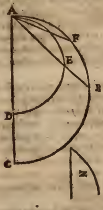
Et sane dissimulare non possum quin fatear ingenue me maxime admirari, & vix posse percipere quod Geometræ doctissimi & perspicacissimi non videant ex ipsis fere terminis, angulum semicirculi maioris, esse maiorem angulo semicirculi minoris; cum enim vnum latus vtriusque anguli sit, eadem recta linea ducta à puncto contactus & transiens per centrum vtriusque circuli, & lineæ curuæ circulorum sese contingant in vnico puncto quod est punctum anguli vtriusque, sequitur quodcunque punctum circuli maioris distare à quocunque puncto circuli minoris: adeoque esse spatium inter ea puncta, cum igitur angulus semicirculi maioris fiat ex inclinatione lineæ circularis respectu diametri, & hæc inclinatio secundum quodcunque punctum, vno excepto in ipso contactu distet extra circumferentiam minorem, quo pacto hæc inclinatio non includet plusquam inclinatio constituta à circumferentia minori, cum hæc sit infra inclinationem circumferentiæ maioris? &c. quæ ratio mihi est ita euidens, vt est euidens quod duo circuli in vnico solum puncto se possint contingere.

Hæc est ratiocinatio viri doctissimi, quâ putat demonstrationum ante allatarum vim plane à se infringi: verum hæc cuiusmodi sit, videamus.

Ac 1. suppono; inter duas magnitudines aliquam esse rationem, idem esse, ac duas magnitudines secundum quantitatem, id est secundum excessum vel defectum aut æqualitatem posse comparari: rursum illas magnitudines secundum quantitatem posse comparari, de quibus dici potest, hæc maior aut minor est illâ: vnde consequens est, magnitudines illas iuxta defin. 5. lib. 5. eiusmodi esse, vt vna aliquoties sumpta possit alteram æquare vel superare:

Atqui secundum auctorem hunc, angulus semicirculi maioris, maior est angulo semicirculi minori, igitur anguli semicirculi, eiusmodi sunt quantitates vt vna aliquoties sumpta, possit alteram superare: igitur in

angulis duobus ſemicitculi,verificari poteſt propoſ.1. decimi, cùm illis competat conditio ab auctore in 1. decimi requiſita. igitur vera eſt hæc propoſitio. *eſto angulus ſemicirculi BAC & quiuis minor angulus mixtilineus Z,qui aliquoties multiplicatus poſſit excedere angulum ſemicirculi BAC; auferatur ex angulo ſemicirculi, angulus quidam maior dimidio anguli ſemicirculi & à reſiduo angulo ſemicirculi rurſus auferatur angulus maior dimidio reſidui anguli, & hoc ſemper poſſit fieri, dico tandem relinquendum angulum aliquem mixtilineum v.g. FA, dato Z minorem.*



Igitur & vera eſt propoſitio 116.de progreſſ. illiuſque corollarium, ex quo huiuſmodi formo propoſitionem, quæ dependet à veritate 1. decimi.

Sint duo ſemicirculi ABC, AED ad eandem diametrum poſiti contingentes ſe intus in A. ex quo ſecans ducatur AEB, biſſècans vtriuſque ſemicirculi peripheriam in E & B. dico angulum ſemicirculi BAC eſſe ad angulum ſemicirculi EAD, vt angulus rectilineus CAB ad rectilineum DAE.

Igitur & vera eſt propoſit. 1.ex quatuor ante allatis, quæ eadem eſt cum hac ſed terminis generalibus propoſita.

Ex his ſequitur 1. male argui propoſitionem 116. de progreſſ. eiuſque corollarium,(quod hic eſt propoſitio 1.)tanquam minus vniuerſalem,quia innititur 1. decimi,quæ duas requirit quantitates, quarum altera aliquoties ſumpta poſſit alteram ſuperare: male inquam arguitur,tum quia in tota Geometria nulla vniuerſalior eſt 1. decimi, aut 116. de progreſſ.neque enim vſpiam in tota Geometria,comparantur duę magnitudines quibus ea conditio non competat,vt vna aliquoties ſumpta poſſit aliam excedere, tum quia eadem conditio requiſita inuenitur in angulis ſemicirculorum vt ante oſtendi.

Sequitur 2. ex eo quod angulus contingentiæ ſit minor quouis acuto rectilineo,adeoque per rectam lineam non ſit auferibile id quo angulus rectus ſuperat angulum ſemicirculi,ex eo inquam, male negari aſſumptũ in demonſtratione primæ propoſ. *quod ſi auferantur partes æquales & non minores dimidiis, deueniendum ad aliquid dato minus: quia illud minus non eſt auferibile à maiori per eam diuiſionem*: nam illud *minus* quod relinquitur aut ad quod deuenitur,non eſt angulus contactus; neque *totum* à quo reliqua auferuntur,eſt angulus rectus,ſed *totum*, eſt angulus ſemicirculi, vt patet ex propoſ.3. hujus, & *minus* illud quod relinquitur eſt angulus mixtilineus FA, pars nimirum anguli ſemicirculi: in quibus auctor ille plane aberrauit,vnde & reliqui errores omnes nati.

Sequitur 3. male afferi,angulum contactus eſſe minorem quouis angulo acuto rectilineo,*minoritate diuerſæ rationis*. quis enim neget, lineas rectas & curuas eſſe eiuſdem ſpeciei, item plana rectilinea & curuilinea, mixtilinea eiuſdem eſſe rationis, cum comparari inter ſe poſſint? atqui anguli omnes cum ſint eſſentialiter duarum linearum inclinatio, quæ lineæ qualeſcunque ſunt, ſpecie non differunt: in eadem quoque manent ſpecie inclinationes, æque atque ipſæ lineæ quarum ſunt inclinationes.

quod

quod si verum, vt est verissimum, non potest angulus contingentiæ, dici minor acuto rectilineo, *minoritate diuersæ speciei*: vbi enim duæ quantitates non differunt specie, ibi excessus vnius super alia, aut huius ab illa defectus differre nequit specie: adde angulum contactus partem esse anguli recti, imo cuiuscunque acuti rectilinei: pars autem specie non differt à toto homogeneo, vt sunt anguli rectilinei: aliud est in physicis compositis hæterogeneis.

Sequitur 4. nil contra nos facere, quod auctor ostendat ex demonstratione nostra sequi, angulum semicirculi æquari angulo recto, id enim & nos sequi dicimus, ex hypothesi quod anguli illi sint veræ quantitates & inter se comparabiles. quod absurdum cum sit, & tamen legitime demonstretur sequi, arguenda non erat demonstratio, sed id quo posito, demonstratiue illud sequi ostenditur.

Sequitur 5. male pro causa paralogismi à me commissi assignari quod putarim, si angulus rectus per rectas lineas diuidatur, quacunque possibili diuisione, eâdem diuisione à recto posse auferri id, quo angulus rectus superat angulum semicirculi: id enim nunquam mihi in mentem venit, neque illud vsquam assumpsi: *tota* enim quæ per diuisionem exhauriuntur, non sunt anguli recti, sed anguli semicirculi; & *residuum dato minus*, est angulus mixtilineus ex arcu circuli & linea secante, non autem angulus contactus.

Sequitur 6. non recte dici excessum quo angulus semicirculi maioris excedit angulum semicirculi minoris, non posse auferri per rectas lineas: hæc enim assertio supponit id quod est in quæstione, nimirum supponit angulum semicirculi maioris, maiorem esse angulo semicirculi minoris. quæritur enim, an angulus semicirculi maioris, sit maior angulo semicirculi minoris: asserit auctor ille cum aliis; ego nego cum P. Gregorio: & dico si anguli semicirculorum sint veræ quantitates & inter se comparabiles, omnes esse æquales; quod cum geometrice demonstretur, ad eneruandam demonstrationem, non recte adfertur aut supponitur vt vera, assertio nostræ contradictoria, de qua est quæstio. neque refert ex eo quod anguli semicirculorum inæqualium demonstrentur esse æquales, infinita sequi absurda aut contradictoria, hoc enim demonstrationis vitium non est, quæ hypothetica est, sed hypothesis ex qua illud legitime demonstratur sequi, quod innumera post se trahit absurda.

CAPVT TERTIVM.

De modo duplici rationes inter se comparandi.

DVos potissimum modos rationes inter se comparandi, tota hactenus agnouit Geometria. vnum, quo ratio vna, maior minorue aliâ, aut illi dicitur æqualis; & hic, rationum est comparatio secundum quantitatem. alterum, quo ratio vna, alterius duplicata, triplicata, quadruplicata dicitur: & hic, est rationum comparatio secundum multiplicationem.

Vtroque porro modo, rationes legitime ac geometrice inter se conferri posse, palam & in confesso est apud eos, qui antiquos Geometras vel obiter legère, & rationum naturam mediocriter perspectam habent. quia

tamen recentiores nonnullos, in eum errorem delapsos video, vt totam rationum naturam, in sola multiplicatione consistere, illamque ab hac ita dependere velint, vt rationes aliter inter se conferri posse negent, quam secundum multiplicationem, non abs re visum est, priusquam ad alia progrediar, errorem illum tenebrasque discutere, ne alios minus in rationum argumento versatos, vnà inuoluant.

Dico igitur rectè ac legitime rationes secundum quantitatem, adeoque aliter quam secundum multiplicationem conferri inter se posse.

1. Ostensum est cap. 1. huius, rationes æque veras quantitates esse atque sunt tres primariæ, linea, superficies, corpus. ex quo illud consequens est, eas omnes rationibus affectiones deberi, quæ primariis illis quantitatibus qua talibus, conueniunt. atqui secundum omnes, aliud est duas lineas v.g. inter se conferre secundum quantitatem, hoc est secundum quod vna maior, minorúe est alterâ aut illi æqualis; aliud vero, easdem inter se conferre secundum potentias, vtraque insuper rectè ac legitime instituitur comparatio: igitur & aliud est duas rationes inter se conferre secundum quantitatem, hoc est secundum quod vna maior minorúe est alterâ, aut illi æqualis, aliud easdem inter se conferre, secundum multiplicationem (quæ rationum quædam veluti potentia est) vtraque insuper rectè ac legitime instituitur comparatio.

2. Certum ac indubitatum est, & vltro aduersarij concedunt, rationes aliquas dari, ita contrarij ac diuersi ordinis, vt inter se conferri nullo modo possint secundum multiplicationem. quales sunt ratio maioris & minoris inæqualitatis, prout demonstrabimus cap. 15. huius: & tamen euidens est, non minus illas inter, atque inter duas quascunque rectas lineas, certam ac determinatam dari habitudinem secundum quantitatem, cum denominatores illarum exhiberi possint, vti exhibebimus cap. 6. huius; rationes igitur aliter inter se conferri possunt ac debent, quam secundum multiplicationem.

A B C D 3. Si rationes aliter inter se conferri nequeant quam secundum multiplicationem, igitur & maioritas vnius rationis super alia; penes eandem desumenda est, illaque ratio maior alterâ dicetur, quæ eiusdem tertiæ magis est multiplicata; quod falsum & contra Euclidem. sint enim quatuor termini continue proportionales ABCD, & A quidem sit minimus; ratio A ad D triplicata est rationis A ad B, cuius duplicata tantum, est ratio A ad C; & tamen iuxta Euclidem & rei veritatem ratio A ad D minor est ratione A ad C.

A B
C D

4. Ratio multiplex v.g. dupla, tripla, quadrupla, specie differt à ratione multiplicata v.g. duplicata, triplicata, quadruplicata &c. nam rationem v.g. A ad B duplam, triplam esse &c. significat vel quantitatem A, bis, ter &c. per additionem continere quantitatem B, vel rationem A ad B bis, ter &c. per additionem continere aliam rationem C ad D, siue rationem CD, sibi additam, producere rationem AB: ratione vero A ad B duplicatâ, triplicatâ esse rationis C ad D, significat ratione A ad B, bis, ter &c. per multiplicationem continere rationem C ad D, vel rationem C ad D bis, ter in se ductam, producere rationem A ad B. cum igitur specie differant, continentia vnius in alio per additionem, & continentia vnius in alio per multiplicationem, necessario etiam modi rationes secundum illas continentias comparandi specie inter se differunt: & cum ab antiquis Geometris passim vtroque

illo modo rationes inter se collatæ sint, manifestum est, rationum comparationes secundum duplicem illum modum legitime institui.

Porro rationem triplam differre à triplicata, duplam à duplicata &c. manifestum est 1. sit A linea tripla lineæ B, erit ratio A ad B tripla 1 quia vero inter A & B infinitæ poni possunt mediæ proportionales, poterit ratio A ad B esse duplicata, quadruplicata, centuplicata; &c. intelligatur igitur inter A & B vna media poni proportionalis, erit ratio A ad B duplicata, & simul tripla, si duæ ponantur mediæ erit ratio A ad B triplicata & simul tripla, si tres mediæ, erit ratio A ad B quadruplicata & simul tripla & sic de cæteris. necessario igitur dupla à duplicata, tripla à triplicata & ab alia quauis multiplicata distingui debet. 2. positis quatuor continue proportionalibus 27. 9. 3. 1. ratio 27. ad 1. est triplicata rationis 3. ad 1. si quis autem illam triplam dixerit, quomodo ratio 27 ad 1. distinguetur à ratione 3. ad 1. quæ vere tripla est? scio quidem rationem 3. ad 1. respectu alicuius posse esse triplicatam, & duplam alicuius duplicatam, sed idcirco, duplam cum duplicata, triplam cum triplicata confundere si liceat, eodem iure, triplam licebit vocare quadruplam, quintuplam, centuplã, &c. cum eadem tripla ratio respectu alicuius possit esse quadruplicata, quintuplicata, centumplicata, prout plures fuerint mediæ proportionales inter extremos terminos rationis triplæ, positæ.

Denique cum nullum opinionis contrariæ apud antiquos reperire sit vestigium, imo ex illa necessario sequantur ea, quæ totam antiquorum euertunt Geometriam, nullum insuper ab erroris illius sequacibus pro ea argumentum vel ad speciem probabile, nedum geometrica adferatur demonstratio, sequitur illam inter ea habendam esse figmenta, quæ sola assertione, & nulla verisimilitudine aut probabilitate constant, adeoque merito à tota Geometria proscribendam.

CAPVT QVARTVM.

De Proportione, Medietate, Proportionalitate.

PARS PRIMA.

Proportio.

Ostensum est capite præcedenti, rationes secundum duplicem modum inter se posse comparari, altero secundum quantitatem, hoc est secundum quod vna maior minorúe est aliâ, aut illi æqualis: altero secundum multiplicationem. de vtroque agendum deinceps: & de posteriori quidem cap. 15. huius. de priori vero, præsenti & sequentibus.

Proportio est mutua duarum rationum quarumcunque secundum quantitatem habitudo.

Dixi, *rationum quarumcunque*, quia cum rationes omnes qualescunque fuerint, æque veræ sint quantitates ac tres primariæ, datisque duabus rationibus quibuscunque, necessario vna maior minorúe sit alterâ, aut illi æqualis, sicut linea lineæ comparata, manifestum est inter quasuis duas rationes certam ac determinatam, mutuamque secundum quantitatem

dari

dari habitudinem,quam proportionem appellamus.

Diuiditur proportio 1. in rationalem & irrationalem. rationalem voco,quæ consistit inter duas rationes, quarum denominatores sunt commensurabiles. irrationalem,quæ est inter duas rationes, quarum denominatores sunt incommensurabiles.

Diuiditur 2 in proportionem æqualitatis & inæqualitatis. æqualitatis proportio est,quando rationes duæ, quæ inter se conferuntur, æquales sunt,quæ proportio sola, ab antiquis in considerationem vocata & Analogia dicta est. inæqualitatis proportio est, quando rationes quæ cõparantur,sunt inæquales inter se.

Proportio inæqualitatis subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis.maioris inæqualitatis est,quando maior ratio confertur cum minori; minoris inæqualitatis, quando minor ratio confertur cum maiore.

Medietas.

Medietas, est medius terminus,qui eorundem extremorum distantiam, pari vel rationum,vel partium differentiâ diuidit: vel.

Medietas est connexio quadam extremorum, per habitudinem vtriusque ad medium.

Medietatum sex præcipue numerantur species à Pappo, Theone &c.

1. *Geometrica* quando vt medius terminus est ad vnum extremorum, ita reliquus est ad medium: vt in his 3.6.12.

2. *Arithmetica*, quando tribus existentibus terminis, medius,vnum extremorum pari excessu superat,& à reliquo superatur. vt in his 3.6.9.

3. *Harmonica*, quando eadem est ratio maximi ad minimum, quæ est differentiæ inter maximum & medium, ad differentiam inter medium & minimum.vt hic.2.3.6.

4. *Harmonica subcontraria*, quando est vt tertius terminus ad primum, ita primi excessus ad excessum secundi.vt hic.6.5.3.

5. *Geometrica subcontraria*, quando est vt tertius terminus ad secundũ, ita primi excessus ad excessum secundi.vt hic: 5.4.2.

6. Quando vt secundus terminus ad primum,ita primi excessus ad excessum secundi. vt in his.6.4.1.

Has inter medietates prima ac præcipua est Geometrica: hæc enim teste Pappo,& seipsam & alias omnes ex æqualitate producit. differt medietas ab analogia,quod omnis analogia sit medietas, sed non contra: accidit enim aliquid medium esse, quod extremorum respectu non est proportionale: veluti in his numeris. 3.2.1.

Proportionalitas.

Proportionalitas est duarum proportionum quarumcunque mutua secundum quantitatem habitudo.

Datis enim duabus quarumcunque rationum proportionibus, necessario vna maior aut minor est alterâ, aut illi æqualis. habitudo autem ista,quâ sese æqualiter,quando sunt æquales,respiciunt, vel inæqualiter, quando sunt inæquales, vocatur proportionalitas, siue propositionum ratio.

Diuiditur in proportionalitatem æqualitatis, & inæqualitatis. æqualitatis est quando proportiones duæ quæ conferuntur ; sunt inter se æquales. inæqualitatis est, quando proportiones illæ sunt inter se inæquales.

Proportionalitas inæqualitatis, subdiuiditur in proportionalitatem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. maioris inæqualitatis est, quando maior proportio confertur cum minori, minoris inæqualitatis, quando minor proportio confertur cum maiori.

Proportionalitatem gratis confictam esse, & contineri sub nomine rationis ex rationibus composita, contendit Alexius Syluius, in examine quadratur. P. Gregorij, quod quam non rectè & parum geometricè idem asseruerit, ostendam cap. vltimo huius libri.

PARS SECVNDA.

Errores Euthymij Grammatici de Proportione.

RVrsus hic, vt in rationis definitione, turpissime hallucinatur Grammaticus.

1	2	4	8	16	32	64
1	1	1	1	1	1	1
1	3	9	27	81	243	729
1	1	1	1	1	1	1
1	4	16	64	256	1024	4096.
1	1	1	1	1	1	1

Pag. 175. tabulam proponit progressionum rationum, vt hic in margine videre est: prima est rationis duplæ, altera triplæ, tertia quadruplæ: & sic deinceps: mox hæc addit: *illud autem notè hic obseruandum, cuiusque ex his rationum progressionibus rationem cum sua seriei & progressionis ratione solum comparari posse, ita vt sciatur, quam rationem hæc ratio ad illam rationem & vicissim obtineat, nullo autem modo diuersæ progressionis rationes inter se comparari possunt, vt, quam inter se rationem habeant definiatur, quamuis illarum differentialis ratio sit notissima: quare ratio 2. ad 1. quæ primæ seriei prima est, ineffabilem rationem habet non tantum ad rationem 3. ad 1. quæ prima est seriei secunda, sed ad omnes alias seriei secũda, tertiæ & quartæ &c. rationes. hoc autem inde euidens est quod duas diuersarũ progressionum rationes per quamcunque aliam minorẽ mensuraturi, nullã plane inuenire queamus quæ vtramq; exactè metiatur; planum itaque est omnes diuersæ seriei rationes inter se esse incommensurabiles.*

Hinc pag. 188. proportionem sic definit: *proportio est eiusdem progressionis rationum, rationis æqualitas*

Mox sui immemor subiungit, *diuersarum tamen progressionum rationes inter se comparari possunt, sed absque vllo vsu & contemplationis concinnitate, vti enim in prima rationis serie ratio 4. ad 1. dupla est rationis 2. ad 1. sic in tripla rationis serie, ratio 9. ad 1. dupla est rationis 3. ad 1.* Hæc ille, inscitè plane & ageometricè.

Vnicus crassissimi erroris fons, quod non intelligat Grammaticus, quid sit rationem vnam cum altera conferre κατὰ πηλικότητα secundum quantitatem, quod nil est aliud quam illas inter se comparare secundum æqualitatem & inæqualitatem: cum enim rationes sint veræ quantitates, vt ostensum cap. 1. huius, positis duabus rationibus quibuscunque, necesse est vnam alterã maiorem aut minorem esse, aut illi æqualem; siue

excessus ille aut defectus, numeris exprimi possit siue non: porro relatio illa duarum rationum secundum esse æquale aut inæquale, est proportio; quemadmodum ratio, est relatio duarum magnitudinum quarumcunque eiusdem generis, secundum esse æquale aut inæquale:

Hinc non solum rationes seriei primæ, comparari possunt cum omnibus & singulis rationibus seriei secundæ & tertiæ, sed cum omnes sint rationabiles, effabilem habent proportionem.

Quod addit rationem v.g. 2 ad 1. incommensurabilem esse rationi 3. ad 1. quod communi careant mensurâ, plane falsum est & ageometricum: neque intelligit grammaticus quæ aut qualis rationum sit mensura. Rationum multiplicium, eadem semper & in omnibus communis mensura est, ratio æqualitatis 1 ad 1, sicut vnitas numerorum communis est mensura: porrò ratio 1 ad 1 ter per additionem sumpta, metitur rationem triplam 3 ad 1, bis vero sumpta metitur rationem 2 ad 1.

Falsum item quod ratio 9 ad 1 dupla sit rationis 3 ad 1. huius enim dupla est ratio 6 ad 1, tripla vero ratio 9 ad 1: sed de his fusius alio loco.

CAPVT QVARTVM.

De natura & munere denominatorum, rationum ac proportionum numeris expressarum.

PARS PRIMA.

De denominatore rationis.

DEnominator (quem alij nomen, denominationem alij, Euclides vero & Eutocius quantitatem appellant rationis) definiri à Geometris his solet verbis: ***Denominator cuiusque rationis, est magnitudo quæ exprimit habitudinem antecedentis termini ad consequentem.***

At melius meo iudicio, sic definietur: ***denominator cuiusque rationis est magnitudo quæ exprimit quantitatem rationis.*** proprium enim denominatorum munus est exhibere, quanta sit ratio, dupla v. g. an tripla &c. porro exhibere habitudinem antecedentis ad consequens idem est ac exhibere rationem, nam habitudo antecedentis ad consequens, est ipsa ratio.

Ratio, quantitas rationis, & denominator, in re vnum idemque sunt: differunt tamen, vt philosophicè loquar, pænes modum concipiendi. Sint v.g. duo numeri 6 & 2. habitudo seu relatio 6 ad 2, est ratio. quantitas illius, est esse triplam, quod vtique est essentialiter relatiuum, & idē in re cum ratione 6 ad 2. quia vero denominator est illa magnitudo quæ quantitatem illam exprimit, necessario denominator in re debet esse quid relatiuum; impossibile enim est, relatiuum vt tale, exprimi per absolutum. porro in hoc differunt, ratio, quantitas, denominator, quod cōcipiendo ***rationem seu habitudinem antecedentis termini ad consequentem***, attingam explicite vtrumque terminum. referendo vnum ad alterum. dum vero concipio eandem sub nomine ***quantitatis***, concipiam rationem illam quasi abstractam, & per modum alicuius absoluti, non attingendo explicite

explicite terminos, aut illos inter se conferendo. denique dum eandem concipio sub nomine *denominatoris*, concipiam illam per modum signi alicuius quod quantitatem rationis repræsentat.

Finis denominatoris est, vt per illum, tanquam per aliquid magis notum deducamur in cognitionem quantitatis rationis minus notam. hinc in numeris denominator rationis v. g. 9 ad 3, est ipsa illa ratio, ad minimos numeros deducta, nimirum ratio 3 ad 1, quia hi numeri notiores sunt, maioribus. scribi tamen pro denominatore, tantum solet numerus 3, antecedens nimirum rationis 9 ad 3 ad minimos terminos reductæ, quia ille sufficienter nos inducit in cognitionem quantitatis rationis: quare ille deinceps denominator appellabitur.

Prima denominatoris, rationis numeris expressæ, notio est. *Vt vnitas ad denominatorem, ita consequens rationis terminus, est ad antecedentem.* sit ratio quæuis 6 ad 2. denominator huius, est numerus 3, quia hic ostendit rationem 6 ad 2 esse triplam: suppone tribus, vnitatem: quoniam denominator rationis 6 ad 2, in re est ipsa illa ratio ad minimos numeros ducta, erit ratio 3 ad 1 eadem quæ 6 ad 2. igitur vt 3 ad 1 ita 6 ad 2, & vt 1 ad 3 ita 2 ad 6. hinc

6	3
2	1

Secunda oritur denominatoris notio ab Eutocio inuenta: *denominator cuiuscunque rationis ductus in terminum consequentem, producit antecedentem.* Assumatur eadem ratio quæ supra 6 ad 2, cuius denominator est numerus 3. dico 3 ducta in 2 consequentem rationis terminum, producere 6 antecedentem. cum enim sit vt vnitas ad denominatorem 3, ita 2 consequens, ad 6 antecedens, denominator 3, ductus in 2 consequentem, producit idem quod antecedens 6 ductus in vnitatem: at 6 in 1 producit antecedentem 6, igitur & denominator 3 ductus in consequentem 2, producit antecedentem 6.

Ex 2 hac notione demonstrantur sequentes duæ propositiones.

I.

Sint duæ rationes A ad B, C ad B, habentes commune consequens: dico rationem AB esse ad rationem CB, vt A est ad C.

A6		D3
	B2	1F
C8		E4

Reducatur vtraque ratio ad minimos numeros, & ratio quidem AB reducta sit ad DF, CB vero ad EF: erunt numeri D, E denominatores rationum AB, CB: quia vero denominator D ductus in consequentem B producit antecedentem A: item denominator E ductus in consequentem B, producit antecedentem C, erit vt A ad C, ita D in B, ad E in B: sed vt D in B ad E in B, ita D ad E, igitur D est ad E vt A ad C, atque vt D ad E, ita ratio AB ad rationem CB, quia D & E illarum sunt denominatores, igitur vt A ad C ita ratio AB ad rationē CB.

I I.

Sint duæ rationes A ad B, A ad C, commune habentes antecedēs. dico rationem AB esse ad rationem AC, vt C est ad B.

D3	
	B12
A2	
	C8

Fiat vt C ad A, ita B ad D. erit igitur inuertendo vt A ad C ita D ad B, & A ad D vt C ad B. item vt ratio AB ad rationem AC, ita ratio AB ad rationem DB, sed AB ratio, per præced. est ad rationem DB, vt A ad D: igitur & ratio AB est ad rationem AC, vt A ad D, id est vt C ad B.

PARS SECVNDA

De denominatore Proportionis.

D*Enominator cuiusque proportionis, est magnitudo quæ exprimit quantitatem proportionis.*

Sit quæuis proportio rationum v.g. 6 ad 2. 8 ad 4. reuocetur vtraque ratio ad minimos terminos, nimirum ad rationes 3 ad 1, 2 ad 1. proportio rationis 3 ad 1 ad rationem 2 ad 1, in re est verus denominator proportionis rationum 6 ad 2. 8 ad 4. quia vero ratio 3 ad 1 est ad rationem 2 ad 1, vt 3 ad 2, per primam præcedentis partis, erit ratio 6 ad 2 ad rationem 8 ad 4, vt 3 ad 2: & ratio 3 ad 2, denominator proportionis rationum 6 ad 2, 8 ad 4: quia ratio 3 ad 2, sesquialtera nimirum, exhibet quantitatem proportionis rationum 6 ad 2, 8 ad 4 esse sesquialteram.

Hinc patet denominatorem proportionis duarum rationum, in re quidem esse eandem proportionem ad minimos numeros deductam, scribi tamen & dici posse denominatorem proportionis duarum rationum esse rationem illam quæ reperitur inter antecedentes terminos rationum ad minimos terminos reductarum, quam deinceps denominatorem proportionum appellabimus.

A6 C12 B3 D2. Prima denominatoris proportionis notio est: *ratio æqualitatis est ad denominatorem proportionis, vt consequens proportionis terminus ad antecedentem terminum eiusdem proportionis.*

H6 E2 G1 F6 G1 Sint AB, CD duæ rationes quæcunque, quæ reductæ ad minimos numeros, sint rationes E ad G, F ad G, erit proportio rationum E ad G, F ad G, in re verus denominator proportionis rationum AB, CD: quia vero ratio E ad G est ad rationem F ad G vt E ad F per 1. partis præcedentis, erit ratio E ad F etiam denominator proportionis rationum AB, CB. iam vero fiat vt G ad G vnitas ad vnitatem, ita F ad H, erit H æquale F & ratio HF æqualis rationi G ad G: item ratio G ad G erit ad rationem EF, vt ratio HF ad rationem EF. atqui per primam partis præced. ratio HF est ad rationem EF vt H ad E, igitur ratio G ad G est ad rationem EF vt H ad E. quia vero H est æqualis ipsi F, erit vt F ad E, ita H ad E, sed vt F ad E ita ratio CD est ad rationem AB, cum F sit denominator rationis CD, & E denominator rationis AB, igitur vt H ad E ita ratio CD est ad rationem AB: sed vt H ad E ita ratio G ad G est ad rationem EF. igitur ratio GG (nimirum æqualitatis) est ad rationem EF (denominatorē proportionis,) vt ratio CD (consequens proportionis terminus) est ad rationem AB, (antecedentem proportionis terminum.) hinc

Secunda oritur denominatoris proportionis notio: *denominator proportionis ductus in consequentem proportionis terminum, producit antecedentem.*

A4 C6 E2 G1 B2 D1 F6 Sint duæ rationes AB, CD, & rationis AB denominator sit E, rationis vero CD denominator sit F. apponatur ratio æqualitatis G ad G. per 1. notionem, ratio æqualitatis G ad G est ad rationem EF denominatorem proportionis, vt ratio CD, consequens proportionis terminus, ad rationem AB, antecedentem eiusdem terminum: quatuor igitur rationes illæ sunt proportionales: igitur ratio G ad G ducta in rationem

tionem A ad B, quarta in primam, producit idem quod ratio EF ducta in rationem CD, tertia in secundam: sed ratio æqualitatis G ad G ducta in rationem A ad B producit rationem AB, igitur & ratio EF (denominator proportionis) ducta in rationem CD (consequentem proportionis terminum) producit rationem AB, antecedentem eiusdem terminum.

Ex hac notione sequentes demonstrantur propositiones.

I.

E8		
A6	C4	G3
B2	D1	H4

Sint duæ quævis rationes AB, CD: fiatque vt D ad C ita B ad E, dico rationem AE ductam in rationem CD, producere rationem AB.

Rationis AB denominator sit G, & CD rationis denominator sit H: per 2. notionem ratio GH ducta in rationem CD producit rationem AB: Rursum quia est vt D ad C ita B ad E, erit ratio CD æqualis rationi EB, & AB ratio ad rationem EB sicut AB ratio ad rationem CD: sed ratio AB est ad rationem EB, vt A ad E, ex ante demõstratis, igitur & AB ratio est ad rationem CD vt A ad E: sed AB ratio est ad rationem CD, vt G ad H, igitur A est E, vt G ad H, & AE ratio æqualis rationi GH; atqui ratio GH ducta in rationem CD producit rationem AB, igitur & AE ratio ducta in rationem CD producit rationem AB.

Hinc sequitur rationem A ad E æque esse denominatorem proportionis rationum AB, CD, quam sit ratio G ad H: cum ratio A ad E eadem sit quæ G ad H: neque refert quod A non sit denominator respectu rationis AB solitarie sumptæ, neque E denominator rationis CD solitarie sumptæ, quia ad proportionum denominatorem nil aliud requiritur, quam vt sit talis magnitudo, quæ proportionis quantitatem exhibeat, quod æque facit ratio A ad E quam ratio G ad H, cum eadem sit, licet termini magnitudine differant: deinde rationi A ad E æque conueniunt notiones denominatorum proportionum ac rationi GH: nimirum ratio æqualitatis ita se habet ad rationem AE, sicut ratio CD ad rationem AB. item ratio AE ducta in rationem CD consequentem proportionis terminum, producit rationem AB antecedentem eiusdem terminum.

II.

E12		
A9	C8	F
B3	D2	G

Sint duæ quæuis rationes AB, CD, & sit ratio FG quæ ducta in rationem CD producat rationem AB, dico rationẽ AB esse ad rationem CD vt F est ad G.

Fiat vt D ad C ita B ad E: per præcedentem ratio AB producitur ex ratione AE ducta in rationem CD, & ratio AB est ad rationem CD vt A ad E: sed ex hypothesi, eadem ratio AB producitur ex ratione FG ducta in rationem CD, idem igitur producitur ex ratione AE in rationem CD, quod ex ratione FG ducta in rationem CD: igitur AE ratio æquatur rationi FG, estque vt A ad E ita F ad G: sed vt A ad E ita ratio AB ad rationem CD: igitur etiam vt F ad G, ita ratio AB ad rationem CD.

Hinc etiam ratio F ad G denominator est proportionis rationum AB, CD.

CAPVT SEXTVM.

De natura & munere denominatorum, rationum ac proportionum irrationalium.

QVæ præcedenti capite dicta sunt de natura & munere denominatorum rationum ac proportionum, numeris expressarum, omnino vniuersalia sunt, & denominatoribus rationum ac proportionum irrationalium conueniunt. quemadmodum enim rationes rationales in eo tantum ab irrationalibus differunt, quod illæ numeris exprimi possint, hæ vero non item, quæ differentia essentiam & naturam rationum non immutat, ita magnitudines quæ vtrarumque rationum ac proportionum quantitates exprimunt, essentia & proprietatibus non differunt: quia tamen nonnulla in irrationalibus animaduertenda, malui ea quæ de harum denominatoribus dicenda sunt, speciali capite prosequi.

PARS PRIMA.

De denominatore rationis irrationalis solitariè sumpta.

DIco 1. nulla ratio irrationalis, proprie reduci potest ad terminos minimos: cum enim rationes illæ inter magnitudines existant continuas, quemadmodum illæ in infinitum subdiuidi possunt, ita rationes illæ, in minoribus & minoribus semper terminis exhiberi possunt, neque erit vspiam vbi sistatur: *hæc assertio, rationibus etiam rationalibus conuenit, quantitate continuâ expressis.*

Dico 2. nulla ratio irrationalis, ad alios terminos reduci potest, qui prioribus per se sunt notiores: cum enim omnes rationes alicui irrationali æquales, irrationales quoque sint (aliàs enim eadem ratio rationalis simul esset, & irrationalis) omnes termini ad quos ratio irrationalis reduci potest, inter se sunt æque incommensurabiles: cum igitur eadem vbique terminorum sit incommensurabilitas, nihil est ex quo horum potius quam illorum terminorum habitudo per se notior sit.

A B C D *Aliter hac in re sentit R. P. Vincentius Leotaudus, putatque rationem rectis lineis expressam, per se notiorem esse, quam sit eadem per superficies aut solida expressa, eo quod linea simplicissimam & vnicam dimensionem habeat, superficies vero duas, & solida tres obtineant. sed bonâ illius veniâ, pluralitas illa dimensionum quam superficies & solida inuoluunt, nullo modo assertionem illius probat, aut contra nostram euincit. esto enim quod est verissimum, trinâ dimensione constent solida, binâ superficies, linea vnicâ & simplicissimâ, an idcirco ratio lineæ A ad lineam B, per se notior est, quam ratio solidi C ad solidum D? nullo modo: licet enim ratio solidi C ad solidum D sit composita ex ratione altitudinis ad altitudinem, latitudinis ad latitudinem, profunditatis ad profunditatem, tamen nulla ex tribus per se notior est duabus reliquis, aut compositâ ex tribus, vnde neque hæc innotescit nisi ex datis, sicut nec ratio lineæ ad lineam.*

A C B D Dico 3. datâ quauis ratione irrationali, nihil determinatè aut completè de illa sciri aut enuntiari posse, nisi ex huius cum altera comparatione: esto AB ratio diametri ad latus quadrati,

quadrati, cum hæc terminis per ſe notioribus exprimi nequeat, concipiendo habitudinem A ad B, nulla de illa formari poteſt enuntiatio niſi identica, ratio A ad B eſt ratio A ad B, ſeu ratio diametri ad latus quadrati, & præterea nihil. at ſi ratio AB conferatur cum alia quauis ratione C ad D, tunc demum aliquid de illa enuntiari poteſt: nimirum ratio AB, maior aut minor eſt ratione CD, aut huic æqualis.

Dico 4. denominator cuiuſque rationis irrationalis (qualiſcunque ille ſit) nullum vſum habet reſpectu illius rationis ſolitariè ſumptæ: cum enim munus denominatoris ſit, diſtinctè exprimere quantitatem rationis tanquam minus notam per aliquid magis notum, nulla autem ratio irrationalis reduci poſſit ad alios terminos magis per ſe notos, nulla quoque ratio in aliis terminis dari poteſt, quæ munus illud denominatoris ſupplere poteſt. vnde ſiue detur denominator aliquis, ſiue non, patet illum, ſi detur, nullum vſum habere poſſe reſpectu rationis ſolitariè ſumptæ:

Dico 5. rationis irrationalis denominator in re eſt ipſamet ratio, in iiſdem quibus datur terminis. patet, quia nulla ratio, in aliis terminis illius quantitatem clarius & notius repreſentat.

PARS SECVNDA.

De denominatore proportionis.

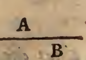
NOta 1. quamuis duæ rationes quæ conferuntur ſint irrationales, ita vt neutra numeris exprimi poſſit, non idcirco illarum proportionem eſſe irrationalem, ſed poſſe eſſe rationalem, & ſubinde irrationalem.

2. Licet nulla ratio irrationalis, aut illarum proportio irrationalis reduci poſſit ad minimos terminos, tamen vt in aliquo ſiſtatur, tunc cenſeri proportionem duarum rationum ad minimos terminos reduci, quando duæ rationes proportionem conſtituentes, reducuntur ad commune conſequens, non qualecunque, ſed ad tale, quocum comparati antecedentes termini, faciunt rationes ſingulas, æquales earum ſingulis quæ reducuntur: ſint v.g. rationes AB, CD, fiatque vt D ad C, ita B ad E, erit B commune conſequens quæſitum.

E
A C
B D

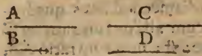
PARS TERTIA.

De Inuentione denominatorum, rationum irrationalium.



NOta, quod ſicut dum rationes rationales, quantitate continua v.g. lineis exprimimus, puta rationem 3 ad 1, lineis AB, quamcunque lineam liceat aſſumere pro vnitate, modo reliqua quæ antecedentem terminum exprimit, illi ſit proportionalis: ita in rationibus irrationalibus, quæcunque linea aſſumi poſſit pro vnitate, modo reliquæ quæ cum hac comparantur, ſint proportionales: nam ſicut vnitas numerica ſupponitur, pro quantitate digitali, palmari, pedali, cubitali &c. quamuis illæ magnitudines inter ſe valde diffe-

differant, ita vicissim magnitudines illæ pro vnitate supponi possunt, vti & quæuis aliæ:



Sit ratio quæuis irrationalis AB: dictum est parte 2. huius denominatorem rationis AB, in re esse ipsammet ratione A ad B in iisdem quibus datur terminis, quod est verissimum: tamen in ordine ad rationem AB comparandam cum alia, dico quamuis magnitudinem v.g. C assumi posse pro denominatore, & illi notiones omnes veri denominatoris competere.

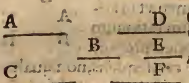
1. Enim si fiat vt A ad B ita C ad D, erit D vnitas, ad denominatorem C, vt B consequens rationis terminus ad A antecedentem.

2. Denominator C ductus in B consequentem terminum, producit A in D vnitatem. cum enim sit vt D vnitas ad C denominatorem, ita B consequens ad A antecedentem terminum, per elementa, D in A æquatur C in B.

Nota: dixi denominator C ductus in consequentem terminum B, producit antecedentem A ductum in vnitatem D: non autem dixi simpliciter, producit antecedentem terminum A, prout in numeris dictum est: quia in quantitate continua v.g. lineis A, B, C, D: C in B non producit lineam sed superficiem, adeoque fit transitus de vna specie quantitatis ad speciem alteram: superficies autem ex C in B nequit comparari cum linea A, nisi hæc per similem ductum transferatur ad speciem superficiei, quod fit ducendo A, in vnitatem D: quod quidem etiam fit in numeris, sed illâ tamen differentiâ, quod in ductu qui fit in numeris, producta non mutent speciem quantitatis, sed maneant in eadem in qua sunt numeri producentes.

Ex his sequentes demonstrantur propositiones.

I.



S*Int duæ rationes irrationales AB, CB habentes commune consequens B. Dico rationem AB esse ad rationem CB vt A est ad C.*

Sumatur quæuis linea D, fiatque vt A ad B ita D ad E, erit E vnitas & D denominator rationis AB, in ordine ad hanc comparandam cum alia ratione C ad B. fiat item vt B ad C ita E ad F, erit vt C ad B ita F ad vnitatem E, & F denominator rationis CB. quoniã D in B producit idem quod A in E, & F in B idem quod C in E; erit vt D in B ad F in B, sic A in E ad C in E: sed D in B est ad F in B vt D ad F, per elementa, & A in E est ad C in E vt A ad C, igitur vt D ad F ita A ad C: sed quia D & F denominatores ponuntur rationum AB, CB, vt D ad F ita ratio AB ad rationem CB, igitur vt A ad C ita ratio AB ad rationem CB.

II.

A

S*Int duæ rationes quæcunque AB, AC habentes commune antecedens A.*

D *Dico rationem AB esse ad rationem AC, vt C est ad B.*

B Fiat vt C ad A ita B ad D: erit vt A ad C ita D ad B & vt D

A ad A ita B ad C, & vt C ad B ita A ad D: atqui per præceden-

C tem vt A ad D ita ratio AB ad rationem DB, igitur vt C ad B ita

ratio A B ad rationem D B, sed ratio D B per constr. est ratio A C, igitur vt C ad B ita ratio A B ad rationem A C.

III.

Sint duæ quæuis rationes non communicantes A B, C D: fiatque vt D ad C ita B ad E.

E
A C
B D

Dico rationem A B esse ad rationem C D vt A est ad E. quoniam est vt D ad C ita B ad E, erit E B ratio æqualis rationi C D: & ratio A B ad rationem C D, vt eadem ratio A B ad rationem E B: sed per 1. huius ratio A B est ad rationem E B vt A ad E, igitur vt A ad E ita ratio A B ad rationem C D.

Aliter rursum hic sentit R.P. Leotaudus: negatque A & E esse aut dici posse denominatores rationum A B, C D, eo quod nec A exprimat habitudinem A ad B, neque E habitudinem C ad D. sed non aduertit vir egregius quod sicut ad denominatorem rationis solitariè sumpta nil aliud requiritur, quam vt sit eiusmodi magnitudo quæ rationis quantitatem exprimat & cui competant notiones denominatoris, ita ad denominatorem proportionis rationum nil aliud requiri quam vt is talis sit magnitudo, quæ quantitatem proportionis exprimat, & cui competant denominatoris notiones, quorum vtrumque conuenit in casu rationi A E: primo enim ratio A E exprimit quantitatem proportionis, cum sit vt A ad E ita ratio A B ad rationem C D: siue eadem sit habitudo rationis A B ad rationem C D, quæ est A ad E: secundo rationi A E conueniunt notiones denominatorum: nimirũ ratio æqualitatis est ad rationẽ A E, sicut ratio C D consequẽs proportionis terminus ad rationem A B, antecedentem eiusdem terminum: item ratio A E ducta in rationem C D, producit rationem A B: quæ duo demonstraui cap. 5. parte 2. vnde nil ad rem facit, siue A exprimat habitudinem A ad B, & E habitudinem C ad D, siue non: id enim ad denominatorem proportionis non requiritur, cuius vnicum munus est exprimere quantitatem proportionis; deinde licet A non exprimat habitudinem A ad B, exprimit tamen quantitatẽ illius habitudinis in ordine ad hanc comparandam cum alia habitudine: tanta enim est habitudo A ad B in ordine ad habitudinem C ad D, quanta est habitudo A ad E: neque vrget quod A in E vnicum tantum producat terminum, cum tamen ex definitione rationis cõposita, quantitas vnius rationis ducta in quantitatem alterius, efficere debeat rationem quæ duos requirit terminos, id inquam nil vrget: nam iuxta ipsummet P. Leotaud, in quantitate discreta v.g. rationum 6 ad 2, 8 ad 4 denominatores sunt numeri 3 & 2 absolute & sine ordine ad vnitatem sumpti: & tamen 3 in 2 vnicum tantũ producunt terminum 6, qui non est ratio, sed collatus cum vnitate efficit rationem compositam: pari modo A in E licet vnicum tantum producat terminum, tamen hic collatus cum altero qui vices vnitatis supplet, dabit rationem compositam.

IV.

Sint duæ quæuis rationes non communicantes A B, C D: fiatque vt C ad D ita A ad E.

E
A C
B D

Dico rationem A B esse ad rationẽ C D, vt E est ad B. Ratio A B est ad rationem A E vt E est ad B per 2. huius: sed ratio A E per constr. est ratio C D, igitur ratio A B est ad rationem C D vt E est ad B.

V.

Sint duæ quæuis rationes A B, C D: & A in D producat F, C vero in B producat G.

E. K
A C
B D
F G

Dico rationem A B esse ad rationem C D vt F est ad G. Fiat vt D ad B ita C ad K. est igitur vt D ad C ita B ad K; igitur per 3. huius, vt A ad K ita ratio A B ad rationem C D; sed ratio A K composita est, ex ratione A C & ratione C K: ratio item F ad G composita est ex ratione A C & ratione D B (hoc est per constr. C K) igitur ratio A K ex iisdem rationibus est composita ex quibus ratio F G, igitur A K ratio æqualis est rationi F G, estque vt A ad K ita F ad G: sed vt A ad K ita ratio A B ad rationem C D, igitur vt F ad G ita ratio A B ad rationem C D.

VI.

A
B C
D E

Data sit ratio A ad B quacunque, oportet exhibere duas rationes quæ sint inter se vt A ad B.

Ponatur quæuis C, fiatque vt B ad C, ita D ad E. Ratio A C est ad rationem B C, vt A C ratio est ad rationem D E, sed ratio A C est ad rationem B C, vt A est ad B, igitur vt A ad B, ita ratio A C est ad rationem D E.

Quæ à Censore A A & ab Euthymio Grammatico in hac materia adferuntur partim adeo friuola, partim absurda sunt, vt laboris pigeat, illa vel referre.

CAPVT SEPTIMVM.

Digressio ad Clariss. virum A A.

EX quo opus Geometricum R. P. Gregorij à S. Vincentio in lucem prodiit, nulla Geometriæ pars æquè coli cæpta est, quam ea quæ de rationibus tractat. videbant enim viri in Geometricis acuti, quantum in rationum cognitione momenti, quantum ad omnem Geometriæ perfectionem opis situm esset: norant itidem, quam parum de rationum natura illarumque vsu, nobis ab antiquis relictum sit: atque adeo ex illis non pauci æqui rerum æstimatores asserere non dubitarunt, Geometriam, quod rationibus dissimilibus perinde ac similibus iam vtatur, ex omnibus præter P. Gregorium cui debeat, habere neminem. quod si verum, vt est verissimum, mirari satis non possum, quo animo vir quidam Clariss. eum P. Gregorij librum, qui de proportionalitatibus inscribitur, vt inutilem, nil noui continentem, innumeris scatentem falsitatibus, ipsum denique Auctorem infeliciter rationes contemplatum censere non dubitauit, quod veritatis indagandæ studio factum si est, modestiam certè in verbis requiro, si vero quid aliud censuram illam protruserit, facile patior in eo me superari, in quo vincere longè est turpissimum, & quando Clarissimi illius viri placita & censuræ sæpius deinceps excutiendæ erunt, lubet totam rei seriem à principio paucis exponere.

Iam annus nonus agitur ex quo post opus Geometricum luci datum, penitius in Galliis nosci cæpit illius auctor P. Gregorius. exinde frequentes doctorum hominum ad illum, & huius vicissim ad illos litteræ: quos inter vir ille est Clarissimus, quem ob censurarum centuriam quám in librum de proport. conscripsit, meriti ergo, Censoris nomine deinceps compellabo. notitiam vt fit, studiorum peperit similitudo; amicitiam, frequentes vtrimque litteræ. quia vero ea quæ vel ad proposita-

rum

rum difficultatum solutiones, vel proportionalitatum explicationes pertinebant, litterarum terminis difficulter comprehendi poterant, præsertim cum è diametro oppositis vterque vteretur principiis, placuit Censoriquæ in rem illam cogitarat, publico committere; quod ipsum Auctori per litteras significauit; sed & huic viri consilium vehementer placuit, eumque à proposito ne desistat per litteras adhortatus est: vtriusque votis hucusque temporum obstitit iniuria, & prælı difficultas. id tamen à Censore impetrauit Auctor, vt eorum quæ adornarat exemplar describi, & ad se transmitti curarit: quæ quia pluribus in Gallia, aliisque alibi communicauit Censor, frustraque illorum prælum iam sexennium sperauit Auctor, bona illius venia, libri titulum, nouæque doctrinę compendium, fideliter hic apponam: Nomen Censoris non edo, tùm quia suâ necdum in lucem protulit, tum quia, vbi ea intelliget tam ab omni veritate aliena, vt sequentibus ostendam capitibus, illorum nosci auctor & haberi nolet. libri titulus est huiusmodi.

A. A. TRACTATVS DE RATIONIBVS

In quo quæcunque tum Euclides in quinto Elementorum libro de rationibus simplicibus, tum alij de simplicibus & compositis proposuerunt, quindecim Theorematis comprehenduntur.

Vna cum Censura integri libri de proportionalitatibus, quem in opere geometrico de quadratura circuli inscripto, inseruit R.P. Gregorius à S. Vincentio,

Et confutatione eius tum circuli tum hyperbolæ Quadraturarum.

Doctrinæ nouæ de Rationibus compendium.

1. *Ostendo inquit 1. rationes veras esse magnitudines, quod eis vera quantitatis proprietas conueniat, posse scilicet considerari secundum maius & minus, cum dentur rationes aliis maiores vel minores.*

2. *Tum inquiro ex proprietatibus rationum, in quo cum aliis magnitudinibus conueniant; & inuenio rationes sequi progressionem Arithmeticam, quando termini sequuntur geometricam; vnde cum omnes progressiones Arithmeticæ sint proportionales, ostendo, loco rationum posse sumi quamlibet progressionem arithmeticam, quæ eas repræsentet; ita vt rationes eam seruent inter se proportionem, quam seruant differentiæ progressionis arithmeticæ, respondentis terminis rationum, qui progressionem geometricam constituunt: quæ cum nihil aliud sint quam numeri seu quantitates, quas vocant Logarithmos, ex logarithmorum proprietatibus, quæ de rationibus sciri possunt, deduco.*

3. *Quia vero tum logarithmi, tum rationes optimè repræsentantur per spatia hyperbolica, quæ à rectis alteri asymptoto parallelis, includuntur, (vt iam de logarithmis notatum aliis, & nouissime P. Sarassa) quæ hucusque dicta sunt, siue per numeros, siue per lineas, optime per hyperbolam confirmabuntur.*

4. Ostendo

4. *Ostendo deinde, quod ratio æqualitatis, nullam habeat quantitatem; sed sit quasi zero vel punctum; cum inter duos numeros æquales, nulla sit logarithmorum differentia, item inter duas æquales lineas nullum spatium hyperbolicum includatur: Vnde cum ratio quæuis inæqualitatis aliquam quantitatem habeat, nulla autem sit inter numerum quemuis, & punctum vel nihilum, nulla item inter punctum & lineam ratio, nullam quoque inter quamuis rationem inæqualitatis, & rationem æqualitatis intercedere posse proportionem: item rationem æqualitatis alteri additam, non facere quid maius &c. atque hinc pendet quam maxime methodus, confutandi errores quos in suo libro de proport. accumulauit Gregorius à S. Vincentio: nam ex 172 propositionibus vix 70 vera sunt, eaque vt plurimum nota.*

5. *Vnde sequitur, quod Euclidi aduersatur, inter 1 & 4 maiorem esse rationem, quam inter 1 & 2: cum maior sit differentia logarithmorum inter 1 & 4, quam inter 1 & 2: quæ cum neme hactenus aduerterit, non mirum, si quando de proportionibus inæqualibus tractatur, fere vbique peccetur.*

6. *Sicut est eadem differentia inter logarithmos duorum numerorum quomodolibet sumantur, vt inter 8 & 1, vel inter 1 & 8, nempe † 3 vel — 3. ita eadē est quantitas rationis inter duas magnitudines siue maior comparetur cum minore, siue minor cum maiore.*

7. *Rationes diuersi ordinis nullo modo inter se possunt comparari: neque enim ratio maioris inæqualitatis potest dici maior aut minor ratione minoris inæqualitatis.*

8. *Sequitur etiam quod rationis compositio nil sit aliud quam rationum vnio, siue fiat additio siue fiat ablatio: quod explicatur per duos motus contrarios.*

9. *Tot errorum vnica est causa, quod Gregorius à S. Vincentio rationes considerauerit vt fractiones.*

Hæc sunt præcipua doctrinæ illius capita & fundamenta; quæ qualia sint sequentibus ostendam capitibus; quod autem sit P. Gregorij de illis iudicium, ex ipsis quas ad Censorē transmisit litteris, facile erit colligere.

Litteræ R.P. Gregorij ad Clariss. virum A.A.

VEnerunt in manus meas feliciter lucubrationes tuæ diu expectatæ; quibus obiter decursis, hæc habeo quæ reponam: gaudeo & gratulor tibi corde sincero, quod nullum impressorem huc vsque nactus fueris, qui eas publici iuris faceret; & casu quo mei gratia hoc pronunciare me censeas, per me licet vt vulgentur, sed prælo; vt iis Geometræ perlectis, expectēt respōsum ad easdē, velà me vel ab vno è meis discipulis, qui talē spartam perlubenter arripient. Ex 172 propositionibus quas libro de proportionalitatibus conscripsi, vltra centum erroris damnas, ego vicissim totidem falsas assero in scripto quod ad me misisti, præter ea quæ ad condemnandas meas quadraturas adiunxisti. petijsti à me candidum responsum, en habes mi A. A. gratias tibi egi pro censura propositionis cuiusdam lib. de hyperbola, ad me transmissa: & maiores ac diductiores (si meas lucubrationes de proportional. non subsistere docuisses) parauεram gratiarum actiones, cum autem tuum scriptum me in mea doctrina data magis confirmarit, æquo animo spero feres, si eodem candore quo prius agnoui errorem (licet meus non sit) de tuis iudicium meum scripserim. Crudeles difficultates mihi inciderunt dum librum illum commiscerer; sed Deo laus omnes tandem mihi in purissimam doctrinæ confirmatio-

firmationem euaserunt:sic etiam à te motæ difficultates, ob visas à me solutiones,parem exitum sortitæ sunt. Veritatis interesse existimas, vt geometras de erroribus qui in librum meum irrepserunt admoneam, ne forte in eos impingant:facerem, moremque tibi gererem si eos agnoscerem:nec mihi obesse censeo tam altum hucusque Geometrarum silentium, quod arbitraris pluribus fore præiudicio:si quis Geometriæ amicus hanc sibi scribendi ansam arripuerit (quod auidissime expecto) vel mihi occasionem præbebit rationum materiam penitius intuendi, vel me à variorum non rectis suspicionibus eximendi. quæ de scripto Patris Sataffæ adiuncta inuenio, eidem relinquo, ipse sibi sufficit: ætatem habet,doctrinamque, sed & calamus ei non deerit, si eum probè noui, vt quæ non recte damnata fuerint,ab errore vindicet &c. en animi mei sensum habes ita libere pronunciatum,atque ille quem scriptum tuum continet. vterque in eo conuenimus quod Geometriam illustrare vt promouere intendimus, committamus nos igitur communi totius orbis arbitrio,vt à spiritu contradictionis liberi maneamus iis animis inter nos, quibus esse non ita pridem cepimus &c.

Habes erudite lector iudicium R.P. Gregorij, nullâ animi perturbatione conceptum,nullâ verborum acrimoniâ expressum,sed candore summo ad Censorem perscriptum.

CAPVT OCTAVVM.

Digressio ad Euthymium Grammaticum.

EST hoc Grammaticis nonnullis, non quasi præscriptione obtentum, sed veluti ex hæreditate ius,in alienis scalpturire scriptis, quæ non intelligunt arrodere,de commate & puncto,de voce ac nomine, de lana caprina non secus ac de orbis imperio decertare; de suo nil nisi quisquilias & nugas proferre pueriles.quod dum egere, tum vero quasi Ioui fulmen extorserint aut Tygranem bello ceperint vt Romanam Rempublicam diuturnâ tyrannide liberarent, mirifice se circumspiciunt, applaudunt ipsi sibi,& quidem soli,domi forisque,in musæo ac foro, voce & scriptis:hinc ad fastidium & nauseam, & sputa vsque pulmonum has aut similes identidem tibi voces occini intelliges:

Appendix,scribendum adpendix:appono, appellabo, apparet,scribendum,adpono,adpellabo,adparet:

Determinata,scribendum disterminata vt habeo in vetusto codice membranaceo.

Argumenta,optimè membrana,augmenta.

Inepta hæc sunt initio adeoque corrupta: pro τὸ μὲν λόγος, vertendo legi τὸ μὲν δύο. deinde eiecta voce δύο,scribo, τὸ δὲ μεγαθῶν

Non vidit hoc Gogauinus,restituendum esse verbum διαφερόντων

Gogauinus inscite & confuse.

Ita emendaui lectionem quam omnes habebant.

Omnes male legebant & distinguebant.

Ad hæc,nulla pagina,græculâ voce caret:quod si auctoris Græci tria verba proferendi sit occasio,quæ latine deinde subiiciantur, solem nimirum digito attigere,in cælum ituri, dominus si iusserit.

Ferenda tamen vtcunque Grammaticalis hæc esset ostentatio,seu po-

 tius

tius ineptia, nisi in omnes alias scientias, quas vix à limine conspexere, & primis vt aiunt labris delibarunt, pædagogico supercilio, ac dictatoriâ incurrerent potestate. vnum dumtaxat alterumúe, ex hoc genere in medium proferam, & primo quidem Iosephum Scaligerum: is è Grammatico & dictatore philologo, factus repente Geometra, eo arrogantiæ ac vesaniæ deuenit, vt Archimedem inscitiæ & paralogismorum accusare, Dinostratum plagij reum agere, Heronem & Apollonium ostentationis arguere, Eratostenis & Nicomedis præclara ad cubi duplicaturam inuenta irridere, Priscos denique ab vno se vinci omnes pronuntiare & scribere non erubuerit: at non impune hæc ipsi cessit arrogantia: huiusmodi enim minerual, ex merito, tulit, à Bartholomæo Sounero, aliisque præclaris id temporis viris; *omnium ageometrarum inscitiam infinito internallo superauit Iosephus Scaliger, bipedum omnium quotquot fuerunt, sunt, & aliis erunt in annis, ne Orontio quidem Finao excepto αγιμιυ γεγρόμπ@ in suis elementis cyclometricis.*

Iosephi arrogantiam, & iactantiam intolerabilem, pæne hoc anno superauit Euthymius grammaticus, in omni litterarum genere Iosepho longe inferior, is vltra crepidam, iam pridem suotus sapere, ea typis eulgare ausus est, quæ homini sano vel incidere potuisse, nemo qui illæso est cerebro, crediderit. audite quotquot estis toto orbe geometræ, audite Thrasonismos Grāmatici intolerabiles, calumnias in optimos quosque Geometras insignes, monstrosos in tota Geometria errores, quos omnes castigare si quis voluerit, Augiæ stabulum expurgarit citius, quā illos vel numerarit: adeo nulla pæne est pagina, quæ non tot stupendas hallucinationes, & ineptias, quot lineas & pæne verba contineat. paucula ex singulis generibus deligam, vt ea lecturi qui sunt, intelligant, quam ex merito & vero hæc à me dicta sint.

Thrasonismi Euthymij Grammatici.

PRæfationem ad lectorem, his orditur verbis: *Quod orbis litteratus gaudeat, posteritas gratâ memoriâ recordetur, Primi nouas Geometricarum rationum leges in natura deteximus: & falsas propositiones in eo libro inuenimus, quem vltima antiquitatis diuini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides ex Aegyptiorum & Patriarcharum inuentis condiderunt, omnium autem seculorum præcipui philosophi ac sapientes legendo examinarunt.*

Mox vbi se Christophoro Columbo noui orbis inuentori, comparauit, hæc subiungit. *Quod si vel tanto minus inuentum nostrum censeretur, quanto maius est falsum inuenisse, quod omnes sapientes verum credebant, quam noui aliquid in eo reperisse, de quo multi ante dubitarunt, tamen & Deo O.M. humillimas gratias agere deberem, qui ad aliquam in natura fundatam veritatem ratiocinando inueniendam, ingenium suffecit, & disciplinis mathematicis gratulari quod certiora imposterum tradere possint.*

Tum paucis interiectis, quibus ait subtilitates Clauij ad defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. se nullâ ingenij vi in adolescentia penetrare potuisse: ita pergit: *illo autem tempore tot locorum in desperatis auctoribus restitutione, quasi perpetuis victoriis animatus, nihil tam arduum, nihil ita intricatum inscientiis, qua quidem ratione aliqua constituta essent, inueniri arbitrabar, vt si ingenij neruos contendere vellem, explicatum illud dare diffiderem.*

Rursus infra: *vtramque hanc difficultatem* (vnam, quales fuerint tritemiū maiorum-

maiorumque nauium ordines, alteram quod genus nauium fuerint hemiolia & trieremiolia) *qua summos viros hactenus torserat &c. notū ad Vitruuium, nouâ sed breui admodum explicatione* Primus *sustuli: porro vnde hemiolia dicta sit* Primus *quoque ex Etymologico magno docui.*

Pag.9 vbi paucis dixit quintum elementorum librum à Pythagora & Eudoxo concinnatum fuisse: hæc addit. *Sed si dicere ausim, ad rei veritatem, quod natura vestigiis non insisterent, in hac contemplatione non omnino penetrarunt. quadam autem qua veteres rectè docuerant, sinistrâ recentiorum interpretatione sunt deprauata: Itaque & recentiores omnes reprehendam, qui antiquos non intellexerunt, & antiquos corrigam, qui malè quadam prodiderunt, vtrosque insuper noua docturus.*

Pag 101. *sed nec Theo hoc intellexit, nec ex posterioribus mathematicis ad nostra vsque tempora vllus.*

Pag. 102. *euidentissimis exemplis & ex media turba petitis ea sum illustraturus, qua rerum naturam presso vestigio sequendo, in rationum Geometricarum doctrina* Primus *omnis antiquitatis, inuenit Euthymius.*

Pag.126. *ex parte autem hoc principium Euclides admisit, nempe in rationibus excessiuis: sed generaliter in omnibus rationibus defectiuis, huius dogmatis veritatem.* Primus *ostendo.*

Pag.127. *Quare cum pracipuus huius narrationis mihi scopus sit; vt totam antiquitatem ignorata in quibusdam elementis Geometria conuincam; deinde autem iuniorum prauas explicationes & monstrosas hallucinationes demonstrē: antiquis hunc honorem habebo, vt primi demonstrationum viribus adacti, veritati victoriam concedere cogantur.*

Pag.146. *minutiarum consideratione deceptos fuisse antiquos, ingeniosè vidit Euthymius.*

Eccum Lector Geometra ex millenis Grammatici Thrasonismis, paucos: nulla pagina non aliquot continet; vix vnquam Euclidem, Archimedem, Apollonium, Hermotymum loquentes inducit nisi aliquid in laudē Euthymij dicant.

Calumnia Euthymij Grammatici in pracipuos Geometras.

IN præfatione ad lectorem. *Rodulphi Volumnij. inquit, Tractatus de proportione proportionum, nisi meliora habeat, quam que ex ipso Clauius protulit, Volusij annalibus insertus potius periisset, quam vt mathematicos in erroribus confirmaret.*

Huius autem errores (nimirum Gregorij à S. Vincentio) *quod plane insignes sint totumque orbem irretitum teneant, clarius demonstrandos duxi, vt omnes viderent, in circuli quadratura perficienda non plus noui quam falsi fuisse repertum. enimuero ab inuenta mathesεos tempore, nullum fuisse puto, qui plus centum & triginta falsas propositiones ex vno erroneo principio deduxisset.*

Quod si illa qua ex antiquis perperam versa sunt, etiam à frederico Commandino, graca lingua mediocriter perito examinare vellem, rebus mathematicis non paruam lucem me allaturum sperarem.

Pag.81. *Boetius vertendo hac, ita modo suo collegit, vel potius disiecit lib.* 1. *Arithm.*

Pag.87. *ex iis qua hactenus disserui, liquere potest, ex interpretibus nullum quid πηλικότης esset, percepisse.*

Pag.88.

Pag 88. *nec egregium illud ſcholium pag.12. adpoſitum Commandinus intellexit.*

Pag.100.*hunc vero errorem* (nempe rationem 6 ad 1, duplam eſſe rationis 3ad 1)*amplianit Gregor. à S. Vincentio; qui grande illud opus Geometricum de quad.circuli ante 7 annos edidit: ſi effectum ſpectemus,conatu ſolo laudabile:ſic vt ſcopum feriret, de rationum proportionibus ſeu vt ipſe cum Boetio vocat proportionalitatibus geometricis protulit noua inuenta , reuera autem noua errata: namque in ſolo* 8 *libro,qui huius doctrinæ fundamenta continet,* 117 *falſas propoſitiones numerauit Euthymius.*

Pag.127. *nulla autem ex omni antiquitate mathematica, illuſtrior propoſitio proferri poteſt quam hac ſit* 8 *Archimedis lib.2.de ſphæra & cylindro, in quâ,toties dicatur qua ratio maior ſit qua minor,qua alterius dupla qua ſeſquialtera:in quo cum Theone,iuniores omnes & in primis Gregorius à S. Vincentio tam ample errarunt.*

Pag.160. *in poſteriore demonſtratione propoſ. eiuſdem* 8.*lib.*2. *de ſph. & cyl. rectangula in laterum rationes defectiuas reſoluendo, paralogiſmum Archimedes commiſit, quem ex veris Euthymij elementis corrigendum hactenus demonſtraui.*

Pag.167. *ex his perſpicuum eſt non tantum ignoraſſe illos auctores* (Theonē, Cardanum, Volumnium, Clauium &c.) *quid ſit rationum compoſitio, ſed & quid ſit ratio.*

Pag.195. *dum* (P.Gregorius à S.Vincentio) *dicit duos rationes componendi modos aſſignari poſſe,quorum alterum deinde additionem vocat, alterum multiplicationem,quid vocabulum,Compoſitio,ſignificet ignorauit.*

Ibid. *vna igitur eſt rationis vera compoſitio quam illa definitione Euclides tradidit: huic autem iuniores quod rerum naturam in Canonicis nunquam conſideraſſent,adeoque quid ratio eſſet ignorarent, monſtroſam & contra natura decreta natam rationis compoſitionem adiunxerunt.*

Synopſis doctrinæ Euthymij Grammatici.

1. DEfinitionem Rationis ab Euclide datam (nimirum Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis ſecundum quantitatem habitudo) ita vult intelligi vt *τὸ ſecundum quantitatem* non magnitudinum notioni,ſed relationis notitioni coniungi debeat,vt ſenſus ſit, ſecundum quantitatem ſeu in quanto continuo,vel quantitate capiendam eſſe relationem,non autem ſecundum quotitatem ſeu in quoto diſcreto,vel numero. adeoque relationem illam duarum magnitudinum ſpectari tantū debere,in quantitate continua & magnitudine, non autem in quotitate & multitudine.

Atque hinc toties Antiquis & modernis obijcit,quod non intellexerint quid ſit ratio.

Vlterius:rationes quarum antecedentes termini maiores ſunt conſequentibus,*exceſſiuas* vocari vult, quarum vero antecedētes minores ſunt conſequentibus,*defectiuas*:quas ait *inepte* à recentioribus vocari rationes maioris & minoris inæqualitatis.

2. Ratio æqualitatis,ratio quidem eſt,ſed ratio nihili, ſicut in logiſtica eſt ô,adeoque nullam habet quantitatem 1 & eſt omnium exceſſiuarum, & defectiuarum minima: *punctum hoc reſpondet puncto* 4.*doctrinæ Cenſoris A A. cap.præcedenti.*

3. Ratio

3. Ratio inæqualitatis comparari nequit cum ratione æqualitatis: id enim idem esset, acsi numerum aliquem, rationem habere dicerem ad nihilum seu ad cifram ô. *respondet hoc, puncto* 4. *Censoris AA.*

4. Ratio 4 ad 1 quadrupla, æqualis est rationi subquadruplæ 1 ad 4, quia æqualiter distant à ratione nihili, illa excedendo, hæc deficiendo: tamen quadrupla ratio non est eadem quæ subquadrupla : *idem est cum puncto* 6. *Cens. AA.*

5. Ratio excessiua (id est maioris inæqualitatis) comparari nequit cum ratione defectiua (id est minoris inæqualitatis) quod diuersi generis sint: comparatio autem eiusdem generis nomina requirit: *vid. punct.* 7. *Cens. AA.*

6. Nullo modo diuersæ progressionis rationes inter se comparari possunt, vt definiatur quam inter se rationem habeant, quamuis illarum differentialis ratio sit notissima: quare ratio 2 ad 1 ineffabilem rationem habet ad rationem 3 ad 1. & illa huic incommensurabilis est.

7. In rationibus excessiuis, verum est, quod maior ad eandem, maiorem habeat rationem, quam minor ad eandem: vt hic ratio 7 ad 4, maior est quam ratio 5 ad 4. verum item est in excessiuis, eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam eadem ad maiorem: vt hic ratio 6 ad 3 maior est ratione 6 ad 4. at in defectiuis falsum est, quod maior ad eandem, maiorem habeat rationem, quam minor ad eandem: nam ratio 4 ad 6 minor est ratione 3 ad 6. falsum item in defectiuis, quod eadem ad maiorem, minorem habeat rationem, quam eadem ad minorem: nam ratio 4 ad 5 minor est ratione 4 ad 7. *idem hoc est cum puncto* 5. *Censoris AA.*

Quare nouam propositionem & Euclidæâ generaliorem efformamus: duarum inæqualium magnitudinum, illa ad eandem, vtrâque aut maiorem aut minorem, aut alterutri æqualē, maiorem rationem habet, quæ longius ab hac distât, & viciſſim:

8. Compositio rationis nil aliud est quam rationum additio. quia ratio per rationem multiplicari nequit, multo minus per numerum aut magnitudinem. quod ibidem per motus contrarios explicatur. *punctum hoc idem est cum* 8. *Censoris AA.*

9. Hoc autem maximè animaduersione dignum, non tantum falsa Gregorij Theoremata, sed & omnes veterum ac iuniorum paralogismos ex eo fonte manasse, quod Geometricas rationes & minutias Arithmeticas eandem contemplationem admittere putarint. *& hoc idem est cum puncto* 9. *Censoris AA.*

Hæc noua illa sunt inuenta, de quibus Orbis litteratus gaudere debeat, & tota Geometria sibi gratulari, certiora deinceps tradere quod possit: Plagij interim insignis, Euthymium accuso, quod omnia hæc dogmata (quorum Primum se inuentorem toties iactat) à Censore AA, volente an nolente, nescio, mutuatus sit: quod quiuis qui hæc cum Censoris doctrina capite præcedente relata, contulerit facilè indicarit.

Euclidis, Archimedis, aliorumque antiquorum propositiones, partim falsitatis partim malæ demonstrationis ab Euthymio Grammatico condemnatæ.

PAg. 126. *Falsa est igitur propos.* 8. *lib.* 5. *elem. &* 10. *& multæ aliæ quæ ab his dependent. falsa item est definitio* 7. *lib.* 5. *multæ autem propositiones veterum*

rum quamuis falsæ non sint, male tamen ex his elementaribus demonstrata: male enim Euclides hac 8. quinti vsus demonstrauit eiusdem libri propos.14. 20.21. male quoque Archimedes ex eadem demonstrauit propositionem 2. lib.1. de sphæra & cylindro, ad quam Eutócius commentando multas erroneas propositiones ex 8. lib.5. deductas protulit: quas ante ipsum Pappus lib.6. Collect. produxerat.

Ex illa quoque 8. propullauit insignis illa paralogismorum series in secunda demonstr.propos.8.lib.2.de sphæra & cylindro.

Pag.153. *Porro cum rationes excessiua & defectiua inter se comparantur, falsæ quoque sunt in adiunctis lib.5.propos.31.32.*

Octo igitur vniuersim falsas propositiones in 5. elem. lib. notauit Euthymius. veterum præterea aliquas, quas in Pappo Euthymius notauit: nempe lib.7.propos. 11. & 12. deinde 14. Porro falsæ sunt propositiones 180. 181. 187. ex parte autem male demonstratæ propos. 232. 233. 234. quæ sunt tria lemmata, in quorum singulis hallucinatus est Commandinus.

Pag.160. *in posteriori demonstratione propos. 8. lib.2. de sph. & cyl. paralogismum Archimedes commisit.*

CAPVT NONVM.

An Logarithmi aut spatia hyperbolica sint rationum denominatores.

PErlectis iis, quæ toto de rationibus tractatu docet Censor, ex vno omnia errore, veluti ex scaturigine profluxisse video; existimauit ille, rationum naturam adeo à multiplicatione dependere, vt illæ vel conferri inter se non possint nisi secundum multiplicationem, vel citra illam nullus earum sit vsus. hinc ad Logarithmos rationum transtulit quantitates, à logarithmis ad spatia hyperbolica, ab his deniq; in reliquos omnes, eosque fœdissimos errores delapsus est: ita vt merito de illo dici possit (quod falsò de auctore pronunciauit ipse) *vix nobilius exemplum adferri posse, quo ostendatur, quam periculosus sit error in principiis.*

Atque illam errorum partem, quæ rationes aliter inter se conferri non posse docet quam secundum multiplicationem, manifestę falsitatis conuici cap.3.huius; ea modo refellenda restat, quæ rationum quantitates ad logarithmos, & spatia transfert hyperbolica.

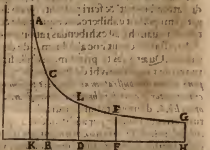
Quæro igitur à quo tempore & quibus vnquam geometris, rationum denominatores, & logarithmi hac ætate nati, res inquam tam diuersæ, vna eademque fuerint? certum est nullum ex omnibus, qui ad hanc vsque fuere diem, præter Censorem, duo illa tam disparata confudisse: humano capiti caudam si pictor equinam iungat, & dicat hæc tam diuersa, rem sibi vnam eandemque esse, nonne ingens pueris ludibrium debebit? eadem tibi causa est age, videamus quid ab omnibus retro sæculis, per rationum denominatores Geometræ, quid per logarithmos, primi eorum Auctores intellexerint, & ilico patebit, quale monstrum in Geometriam inuexerit Censor.

Denominatores, secundum omnes tam antiquos quam recentiores sunt magnitudines, quæ exprimunt quantitates rationum & proportionum: nimirum an sit dupla, tripla, quadrupla, aut vna sit maior minorue alterâ aut illi æqualis.

Loga-

Logarithmi, sunt exponentes magnitudinum continue proportionalium; id est numeri, qui designant quota sit vnaquæque continue proportionalium à prima eiusdem seriei: siue sunt numeri, qui ostendunt quoties ratio primæ proportionalis ad secundam, contineatur per multiplicationem, in rationibus eiusdem primæ proportionalis ad quamuis continue proportionalium.

Quis amabo vel leuiter in Geometria versatus, non videat immane quantum duo illa inter se differant? denominatorum munus est, exhibere quantitatem rationis, id est an vna ratio sit alterâ maior, minorúe, aut illi æqualis: logarithmorum munus est, exhibere, quoties vna ratio sit alterius in eadem serie multiplicata, v.g. an duplicata, triplicata &c. quæ duo tantum inter se differunt, quantum ratio multiplex à multiplicata, dupla à duplicata, tripla à triplicata, quas specie differre ostensum est cap. 3. huius. Logarithmi igitur neque sunt neque vllo modo esse possunt rationum denominatores.



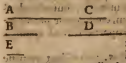
A logarithmis ad spatia deuenio hyperbolica: demonstrat Auctor oper. Geom. lib. 6. prop. 130. spatia hyperbolica à rectis alteri asymptotorum paralelis intercepta, v.g. spatia A B, C D, L F &c. æqualia esse inter se, si lineæ A K, C B, L D &c. fuerint continue proportionales. si verò rectæ illæ fuerint quæcunque non proportionales, ostendit propos. 129. spatium A B tam multiplex esse spatij C D, quam ratio lineæ A K ad C B, multiplicata est rationis C B ad L D: siue spatium A B toties per additionem continere spatium C D, quoties ratio A K ad C B, per multiplicationem continet rationem C B ad L D: idque vniuersaliter.

Speculationem hanc pulcherrimam primus & felicissime logarithmis applicuit P. Alphonsus de Sarassa, & ipse Geometra egregius, docetque totam logarithmorum doctrinam, optimè & facillimè explicari per hyperbolam: cum spatia faciant progressionem Arithmeticam, quando lineæ quæ spatia intercipiunt, faciunt progressionem geometricam; & cum hucusque tota logarithmorum scientia de illis tantum fuerit quantitatibus, quæ intra series proportionalium existunt; per hyperbolam vero ad eas etiam extendatur magnitudines, quæ extra series existunt; immensa hæc scientiæ logarithmicæ extensio & perfectio, tota vni debetur Patri Sarassæ.

Adinuentionem illam, rationum quantitatibus, infelicissime applicuit Censor; atque ita vult rationes sequi spatia hyperbolica, vt illæ per hæc, tanquam per denominatores, repræsententur; additque, non plura de rationibus sciri posse, quam de spatiis hyperbolicis. verùm cum spatia hyperbolica, nil aliud repræsentent aut repræsentare possint, quã quoties rationes linearum spatia includentium, se inuicem per multiplicationem contineant, denominatorum vero munus sit exhibere, an vna ratio sit maior alterâ minorúe, aut illi æqualis, (quæ duo specie differunt) euidens

 est

eſt ſpatia hyperbolica nec eſſe neque vllo modo eſſe poſſe rationum denominatores.



Deinde datæ ſint rationes duæ, & A B quidem majoris inæqualitatis C D vero minoris; certum eſt illas ſecundum multiplicationem inter ſe comparari non poſſe, ſiue non poſſe exhiberi, an, & quoties vna ſit alterius multiplicata; an nullos tamen illæ habebunt denominatores, nullam proportionem quæ exhiberi poſſit? ridiculum. fiat vt D ad C ita B ad E, erit A B ratio ad rationem C D, vt A ad E, vt demonſtraui cap. 6. huius.

Rurſum datis duabus rationibus, ſi quis petat exhiberi tertiam aut mediam proportionalem, illene petit, datis duobus ſpatiis hyperbolicis inæqualibus, exhiberi medium aut tertium proportionale? hoc qui dabit, meſolabium abſoluit: at prius exhiberi poſſe abſque meſolabio, nemo negauerit geometra, vide lib. 8. propoſ. 141. 142. 143. 144. alia igitur & plura de rationibus peti & ſciri poſſunt, quam aut ſpatia hyperbolica aut logarithmi poſſint exhibere, adeoque malè & contra omnem geometriam, tam illa quam hi, ad exhibendas rationum quantitates aſſumuntur.

Priuſquam caput hoc abſoluam, de duobus mihi Cenſor es interrogandus. Quæro abs te primùm, quid illa ſignificent verba, quæ in tractatu tuo de rationibus, vbi de ſpatiis agis hyperbolicis, ita lego; *quod hic ſuppono vt iam demonſtratum ab aliis, licet poſſem nouâ methodo, quâ magnâ cum facilitate vtor in conicis id breuiter demonſtrare, videri poſſit P. Gregorius in ſuo opere lib. 6.* demonſtratum, inquis, ab aliis eſt, ſpatia hyperbolica, ſe mutuo toties continere per additionem, quoties rationes linearum ſpatia includentium, ſe mutuo continent per multiplicationem, idemque à te nouâ methodo quâ magnâ cum facilitate vteris in conicis breuiter poſſe demonſtrari. igitur id iuxta te neque primùm, neque à ſolo P. Gregorio demonſtratum eſt. at à quibus ante vel præter ipſum? cur auctorem tam præclaræ propoſitionis demonſtratæ non profers? cur ipſe nouâ tuâ quâ in conicis tam facile verſaris methodo non demonſtras? propoſitio certè illa eſt eiuſmodi, quæ earum nullis quas Apollonius poſteris reliquit, aut inuentionis ſubtilitate, aut dignitate cedit: age propoſitionem illam geometricè, aliter quam Auctor fecerit, demonſtra, & egregium te probabis geometram.

Quæro abs te ſecundùm, à quibus, ante vel præter P. Saraſſam obſeruatum & demonſtratum, logarithmos optimè per ſpatia repreſentari hyperbolica? an eam tu adinuentionem tam leuis eſſe momenti exiſtimas, vt ſi cui ea ante obſeruata aut demonſtrata eſſet, illam publico non fuiſſet commiſſurus, aut ſaltem tanto poſt tempore non committeret? præſertim in Galliis, vbi tam multa indies mathematica prodeunt? illam ſubticuiſſet Merſennius, qui Gallorum inuenta, tam edita quam edenda, adeo ſtudioſè enarrat & extollit? ſi id alius ante vel præter P. Saraſſa demonſtrarit, nomen ede: turpe eſt illam quam ſuis quiſque conatibus meretur laudem detrahere, & alteri perperam adſcribere.

CAPVT DECIMVM.

De Ratione æqualitatis.

INter omnes rationum ſpecies,ea potiſſimum apud Antiquos in pretio fuit,quam æqualitatis vocant:hanc Adraſtus & Eratoſtenes ordinem ducere,primamque eſſe rationum omnium & analogiarum pronuntiarunt:ex hac Nicomachus,Pappus,Theon Smyrnæus,Boetius, medietates omnes educunt , & inillam viciſſim reſoluunt: diſplicuit tamen illa vſque adeo Cenſori, vt de rationum numero eam tantum non eiecerit, ſed ad zero & nihilum vſque redegerit. neque hoc curſim aut ex incidenti,ſed ita collato ſtudio, vt hæc illius nouitas, non minimam tractatus eius,quem de rationibus conſcripſit partem vindicet; & fateatur ipſe præcipuum in ea poſitum eſſe argumentum , quo librum Auctoris de proport. euertere conatus eſt.quod quam egerit infeliciter, oſtendam alibi,quam vero nullis illa opinio nitatur fundamentis, toto hoc monſtrabo capite.

PARS PRIMA.

Quo ſenſu æqualitatis Ratio, cæterarum ſit elementum.

ERatoſtenes apud Theonem Smyrnæum cap.31. rationem æqualitatis reliquarum eſſe elementum ſic oſtendit. *Analogia omnis rationibus conſtat,rationis vero principium eſt æqualitas. illud hinc ſit manifeſtum, quod in ſingulis generibus proprium quoddã eſt elementum & principium,in quod cætera reſoluantur,ipſum vero in iſtorũ nullum:oportet igitur hoc eſſe indiuiſibile & indiuiduũ;quod enim diuidi aut ſecari poteſt,collectio dicitur,& non elementũ: ſubſtantiæ itaque elementa ſecundum ſubſtantiã,indiuiſibilia ſunt:qualitatis ſecundũ qualitatẽ,quantitatis ſecundũ quantitatem.atque omnino vnũquodque eſt ratione indiuiduum eſt & vnum,quà elementum eſt compoſiti cuiuſdã & mixti; numeri quidem quantitatis diſcretæ elementum,eſt vnitas; continuæ punctum ; rationis autem & proportionis;æqualitas.neque enim amplius diuidi poteſt vnitas in quãtitatem diſcretam , aut punctum in continuam, aut æqualitas in plures rationes. componitur autem numerus ex vnitate, linea ex puncto., ratio & analogia ex æqualitate:non tamen ſinguli horum eodem modo;ſed vnitas in ſe ipſã multiplicata, nihil generat,quemadmodum alij numeri; ſemel enim vnum,vnum. compoſitione vero in infinitum augetur; punctum autem neque multiplicatione neque compoſitione,ſed continuo fluxu latum lineam abſoluit,linea ſuperficiem, ſuperficies corpus. atque etiam æqualium ratio compoſitione non creſcit; pluribus enim æqualibus ordine diſpoſitis, ratio ſumma in æqualitate manet, propterea fit,vt punctum non ſit pars lineæ , & æqualitas rationis , vnitas certe pars eſt numeri, ſola ipſã enim compoſita quoddam incrementum ſuſcipit,cauſa vero huius quod dicitur eſt, quia æqualitas interuallo caret, ſicut punctum magnitudine.* Hæc ille.

Diſcurſus hic partim philoſophicus eſt , partim ad geometriam ſpectat. atque duo potiſſimum in eo adſtruuntur : primùm quidem,vnitatem,elementum eſſe quantitatis diſcretæ;punctum continuæ; æqualitatem,rationis & analogiæ. alterum,non eodem modo illorum ſingula ele-

mentum esse: & vnitatem quidem partem numeri esse, at in se multiplicatam nihil generare; compositam autem augeri in infinitum. punctum vero neque partem lineæ esse, neque multiplicatione aut compositione, sed continuo fluxu lineam absoluere. æqualium denique rationem, compositione non crescere, neque partem esse rationis, quod interuallo careat. verum cuiusmodi hæc sint, videamus.

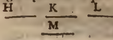
Ac primùm quidem, vnitatem, & numeri partem esse, & elementum quantitatis discretæ, illam item in se multiplicatam nihil generare, compositam vero, augeri in infinitum, lubens Eratosteni concedo; cum sit verissimum, & à pluribus demonstratum: at de puncto non item: cum enim etiam iuxta ipsum illud elementum dicatur & sit, in quod cætera resoluuntur, ipsum vero in istorum nullum, linea autem non resoluatur in punctum, cum ex hoc tanquam ex parte non constituatur (quod Aristoteles omnesque philosophi ad esse principij seu elementi requirunt) euidens est punctum nullâ ratione esse aut dici posse elementum quantitatis continuæ. quod autem punctum dicatur continuo fluxu latum, lineam absoluere, nil nisi verba sunt, conceptum metaphysicum exprimentia, quo modo nimirum linea omni intelligatur carere latitudine & profunditate.

Porro æqualitatem, rationis & analogiæ elementum esse, plane eidem assentior: quod subdit, *æqualium rationem compositione non crescere, quod pluribus æqualibus ordine dispositis, ratio summa in æqualitate maneat*, dupliciter intelligi potest: vel enim compositionem à multiplicatione distinguit, (vti paulo ante de puncto agens, videtur facere) & per illam intelligit veram rationum additionem, & sic manifestè falsum est assertum, vti infra num. 2. ostendam; vel Euclidæam intelligit compositionem, quæ rationum multiplicatione perficitur, vt ostendam cap. 15. & sic verissimum est assumptum: sed inde nil contra nos sequitur.

Illud autem quod concludit, *æqualitatem non esse partem rationis, quia interuallo caret, sicut punctum magnitudine*, falsum est, illiusque probatio plane friuola: esto enim æqualitas interuallo seu differentia quantitatis careat, qui vel in speciem inde sequitur, illam non esse partem rationis? deinde licet careat interuallo quantitatis, non caret interuallis rationum: si enim inter æquales duas lineas, quotuis ponantur inæquales, ratio primæ ad vltimam, quæ æqualitatis est, componitur ex rationibus omnibus intermediis: quod autem ex rationibus componitur, ipsum necessario est ratio, nam quod nihil est, non potest dici aut concipi, componi ex aliquibus quæ sunt, aut punctum ex quantitatibus.

Denique quia ex allatis Eratostenis verbis, nonnulli colligunt, similitudinem aliquam ab illo adstrui interpunctum & rationem æqualitatis, placet paucis ostendere nihil hanc cum illo habere commune.

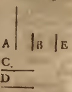
1. Ratio in genere, est vera quantitas, vt ostendi cap. 1. at ratio secundum omnes tam antiquos quam recentiores, rectè diuiditur in rationem æqualitatis & inæqualitatis; ratio igitur æqualitatis est vera quantitas: ridicula alioquin esset illa rationis diuisio, similisque ei, quâ quantitatem quis diuidens in continuam & discretam, negaret continuam, esse quantitatem: atqui punctum nec quantitas est, nec illius pars; nil igitur puncto & æqualitatis rationi commune.



2. Sint quatuor lineæ æquales H, K, L, M: quarum tres H, K, L, sint antecedentes, & M consequens: patet rationes H M, K M, L M esse æqualitatis:

qualitatis:demonstratum autem est ab Auctore propos. 114.l.8. rationes H M,.K M, L M sibi additas,æquari vni rationi, cuius antecedens sunt tres lineæ H, K, L, consequens vero M; quæ ratio maior est ratione H ad M, vel K ad M, igitur plures rationes æqualitatis sibi inuicem additæ faciunt quid maius,ratioue æqualitatis; & earum summa non manet in æqualitate:punctum autem additum puncto, non facit quid maius. igitur rationi æqualitatis & puncto nil est commnne.

3. Sit A B ratio quæuis inæqualitatis, & C D æqualitatis,fiatque vt D ad C ita B ad E, erunt B & E rectæ æquales, & B E, C D rationes æquales:sed ratio A B vna cum ratione E B,æqualis est rationi ex A & E ad B,per 114. de proport. igitur etiam ratio AB vna cum ratione C D,æquatur rationi ex A & E ad B: at ratio ex A & E ad B,maior est ratione A ad B per 8.v. Eucl. ratio igitur æqualitatis C D, addita rationi inæqualitatis A B, hanc immutat, & cum illa facit quid maius. atqui punctum additnm lineæ, hanc neque immutat, neque cũ illa facit quid maius:nil igitur puncto & rationi æqualitatis commune.



4. Ratio æqualitatis est specifica sub genere rationis rationalis, quia inter æquales consistit terminos,adeoque commensurabiles; omnis autem rationis specificæ rationalis,denominator est numerus vel integer, vel fractus in minimis terminis;& quidem rationis maioris inæqualitatis,denominator est maior vnitate;minoris inæqualitatis, minor vnitate; igitur rationis æqualitatis denominator est ipsa vnitas: vnde sequitur rationem maioris inæqualitatis esse maiorem ratione æqualitatis, & hanc maiorem quâuis ratione minoris inæqualitatis: idque vniuersaliter etiam in rationibus irrationalibus. atque vnitas cum pars numeri sit, vt ostendunt Salignacus, Steuinius &c. vera quantitas est, ratio igitur æqualitatis quantitatem habet,adeoque nil commune cum puncto, quod omni caret magnitudine.

Ex quibus concludo, æqualitatis rationem, eo modo analogiæ cæterarumque rationum elementum esse, quo vnitas est numeri & quantitatis discretæ.

PARS SECVNDA.

Reijcitur doctrina Censoris de ratione æqualitatis.

RAtionem æqualitatis nullam habere quantitatem, sed esse vel punctum respectu lineæ, vel zero aut nihil respectu numeri, quatuor potissimum argumentis probare conatur Censor.

Primum est: *videbam, inquit, plures rationes æqualitatis non esse maiores vnicâ; rationem æqualitatis cum quauis alia iunctam, eam non immutare; &c. vnde coniiciebam, rationem æqualitatis nullam debere habere quantitatem, sed esse vel punctum respectu lineæ, vel zero respectu numeri.*

At primam argumenti partem, quæ ait plures rationes æqualitatis non esse maiores vnicâ, falsam ostendi prima parte huius num. 2. nam tres rationes æqualitatis sibi additæ, producunt triplam primæ, quatuor quadruplam &c.

Secun-

Secundam quoque partem falſitatis conuici num.3.ibid. nam ratio æqualitatis alteri inæqualitatis addita,hanc immutat, & cum ea facit quid maius..



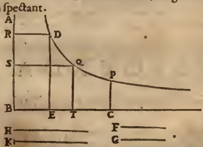
Couclusionem denique,quâ infert, rationem æqualitatis nullam habere quantitatem, ſed eſſe vel punctum vel zero &c. euidenter falſam eſſe oſtendi num. 1. & 4. eo quod æqualitatis ratio æque ac inæqualitatis,ſit vera quantitas, & denominatorem habeat vnitatem : his adde rationem quamcunque inæqualitatis A B, ductam in rationem B A, producere rationem æqualitatis A ad A, vt demonſtrat Auctor oper. li.8. propoſ.76. atqui ratio inæqualitatis A B multiplicata per rationem B A, non eſt nihil,ſiue non producit nihil , ratio igitur æqualitatis non eſt nihil, ſed aliquid , adeoque ratio & quantitas. vanum igitur & nullum eſt totum primum Cenſoris argumentum.

Secundum eſt huiuſmodi:*cum autem inter duos terminos æquales ſeu potius eundem,nulla ſit logarithmorum differentia,ſeu nulla in progreſſione arithmetica differentia, cum nulla quoque in progreſſione geometrica ſit inæqualitas v.g. inter 2 & 2,ratio illa nullam habet magnitudinem.*

Sed hoc æque ac prius nullum eſt : oſtenſum eſt enim cap.3. huius, longè aliud eſſe rationes conſiderare & conferre ſecundum quantitates, aliud ſecundum multiplicationem:oſtenſum inſuper eſt cap.9.rationum ſecundum quantitatem conſideratarum, denominatores nec eſſe, neque eſſe poſſe logarithmos;nullum igitur eſt argumentum à logarithmis petitum.

Tertium ſpatiis innititur hyperbolicis. *cum,inquit , inter duas lineas æquales,ſeu potius vnicam,nullum ſpatium includatur hyperbolicum , patet rationem æqualitatis nullam habere quantitatem.*

Hoc quoque nil ad rem pertinet: oſtendi enim cap.9. huius ſpatia hyperbolica nullo modo poſſe repræſentare rationes ſecundum quantitatem,ſiue illarum eſſe denominatores,nil igitur illa probant , imo nec ad rem ſpectant.

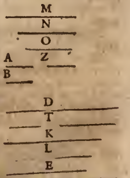


Lubet tamen exercitij cauſa oſtendere, quo modo proportio rationum duarũ æqualitatis , poſſit in hyperbola exhiberi. ſint tam H & K quam F & G lineæ æquales : erunt tã H K , F G rationes, quam H F , K G inter ſe æquales. inſuper per 39. de proport.proportio rationis H F ad K G, eadem eſt cum proportione rationis H K ad F G: ſi igitur in hyperbola exhibuero proportionem rationum H F, K G, etiam exhibuero proportionem rationũ H K, F G : ſint D Q P hyperbolæ aſymptoti A B, B C , ſumptâque B R æquali H, ducatur R D paralela C B , & D E paralela R B : rurſum ſumatur S B æqualis F, ductaque S Q paralela C B, ponatur Q T paralela S B, fiatque vt B E ad B T, ita B T ad B C , erigaturque C P paralela A B. patet ex 78.lib. de hyperb. rectas P C, Q T, D E continuè eſſe proportionales:igitur vt D E ad Q T (hoc eſt H ad F)ita Q T ad P C

ad P C (hoc est K ad G) (nam ratio Q T ad P C, eadem est cum ratione D E ad Q T, hoc est H ad F, hoc est K ad G) exhibita igitur est in hyperbola proportio rationum H F, K G, adeoque & proportio rationum H K, F G.

Et quoniam iam in hyperbola versamur, placet vnum è nouis illis Censoris figmentis in lucem adferre: habetur id coroll. 2. Theor. 1. *patet, inquit, inter duas lineas quomodocunque sumantur, eandem esse quantitatem rationis, cum spatium inter ipsas conclusum, sit vnum & idem, siue comparetur maior cum minore, siue minor cum maiore.* igitur secundum illum, ratio lineæ DE ad Q T, eadem est cum ratione Q T ad D E: quis quæso Geometra ferat talia in geometriam irrepere? certè vel vnum hoc corollarium sufficit, vt totus Censoris de rationibus tractatus à tota Geometria proscribatur. & vero qui etiam secundum illius principia, ratio D E ad Q T æqualis est rationi Q T ad D E, cum illa sit maioris inæqualitatis, hæc autem minoris, quas inter se conferri posse negat? si autem velit rationem D E ad Q T, idcirco æqualem esse rationi Q T ad D E, quod vtraque eiusdem tertiæ æquè sit multiplicata; sit illa tertia v.g. ratio H ad F, maioris inæqualitatis, cuius triplicata ponatur ratio D E ad Q T: igitur ratio Q T ad D E, minoris inæqualitatis, etiam triplicata est rationis H ad F maioris inæqualitatis; rursum igitur, & quidem secundum multiplicationem, comparantur rationes duę contrarij ordinis, quod fieri non potest, & ipse asserit esse absurdum. at ratio. inquies, Q T ad D E triplicata est rationis F ad H, ratio autem D E ad Q T triplicata rationis H ad F: esto: quid inde conficitur? an quod ratio D E ad Q T sit, æqualis rationi Q T ad D E? nihil minus: probandum enim primum esset, rationem H ad F æquari rationi F ad H: quod per se falsum, & de quo eadem redit quæstio.

Quartum argumentum in absurdo consistit: *sit ratio, inquit, æqualitatis A A. si eius quantitatem inquiramus, inueniemus nullam esse: sit enim aliqua quantitas, quæ rationem æqualitatis repræsentet, vt Z. cum igitur quælibet datâ ratione maioris inæqualitatis, possit dari minor & minor in infinitum, tandem deuenietur ad quantitatem datâ Z minorem, ac proinde ratio æqualitatis, erit maior ratione maioris inæqualitatis, quod est absurdum.*



Hoc rursum, vt tria reliqua, infelix est. sit enim quantitas quæcunque Z, cui æqualis ponatur A & huic æqualis B; erit A B rationis, quãtitas Z. sit autem ratio maioris inæqualitatis D ad E, fiatquè vt E ad D, ita B ad M; erit M denominator rationis D E per cap. 6. huius: & quia est vt E ad D, minor ad maiorem, ita B ad M, erit M, maior quam B, hoc est quam Z. deinde inter D & E ponatur L, maior quidem quam E, minor autem quam D; erit ratio D ad L, minor ratione D ad E per 8. v. Euclid. rationis autem D ad L inueniatur vt prius denominator N. ostendetur vt ante, N maior quam Z, & minor quam M. rursum inter D & L ponatur K, maior ipsâ L, minor autem quam D. erit rursum ratio D K, minor ratione D L; & O denominator rationis D K, ostendetur maior quam Z, minor vero quam N; atque ita in infinitum procedendo eâ ratione decrescent denominatores M, N, O, quâ decrescunt

crescunt rationes maioris inæqualitatis D E, D L, D K. quare quamdiu decrescentes illæ rationes manent intra speciem maioris inæqualitatis, tam diu illarum denominatores, erunt maiores quantitate Z; & quò vicinius rationes illæ decrescendo accedent ad rationẽ æqualitatis T D, eò denominatores illarum decrescendo, magis accedent ad æqualitatem cum quantitate Z. vnde si ponatur ratio maioris inæqualitatis D ad E, per infinita, adeoque omnia decrementa defecisse, euadet tandem in rationem æqualitatis D T: quo casu si fiat vt T ad D, ita B ad aliud, hoc erit ipsum Z. licet igitur ratio maioris inæqualitatis D E, in infinitum possit decrescere, nunquam illius quantitas seu denominator, minor erit quantitate Z, quamdiu intra speciem maioris inæqualitatis stabitur; sed hac semper maior; omni autem decremento exhausto, sicut ratio D E, desinet in rationem æqualitatis D T, æqualem A B, ita illius quantitas seu denominator, desinet in huius denominatorem Z. falsa igitur tota Censoris est demonstratio.

PARS TERTIA.

Reijciuntur errores Euthymij Grammatici,

CEnsoris Erroribus, nouos de suo, vt solet, adiecit Euthymius Grammaticus:

Pag. 109. *cæterum*, inquit, *illarum rationum mediam, quæ ex æqualibus terminis constat, quam propterea æqualem veteres appellarunt, nihili rationem vocat Euthymius, quemadmodum O nota nulla seu siphra in absolutis numeris nihilum significat.*

Pag. 137. *Ratio nihili est rationum omnium excessiuarum & defectiuarum fundamentum & principium, vti ciphra seu numerus nullus: si rationis nihili antecedentem terminum multiplicem exempli-gratia per 4, addo rationi nihili rationem quadruplam: adeo vt ratio ex ratione nihili & addita ratione quadrupla composita, fit ratio quadrupla: sin consequentem rationis nihili terminum multiplicem per eundem numerum 4, aufero à nihili ratione, rationem quadruplam, adeo vt ratio ex nihili ratione & ablata ratione quadrupla composita, fit subquadrupla.*

Pag. 143. *omnium rationum excessiuarum & defectiuarum, minima est ratio nihili.*

Pag. 198. vbi propos. 2. lib. 8. oper. Geom. censuit: *ex hac*, inquit, *propositione, quod admodum absurdum est, etiam quæuis ratio ad rationem nihili habebit rationem, quam antecedens ad antecedens, quod idem est ac si numerum rationem habere dicerem ad nihilum seu ciphram O.*

Pag. 118. *Porro nihili rationem, rationem quidem esse statuimus, sed nullius quantitatis; quod nihili distantia magnitudines illius, antecedens & consequens, inter se distent.*

Ingens hic errorum farrago. & stupendæ hallucinationes: ac 1. rationem æqualitatis, non esse rationem nihili, quemadmodum in numeris est nota O, sed veram esse rationem, & suam habere quantitatẽ, ostensum est parte 1 & 2, præsentis capitis. & vero qui ratio æqualitatis, etiam iuxta Euthymium, respectu aliarum rationum potest esse, sicuti nota O respectu numerorum, tum quia iuxta ipsum, ratio æqualitatis omnium excessiuarum

ſiuarum & defectiuarum eſt fundamentum & principium, quod notæ ô in numeris nullo modo competit, tumquia etiam iuxta ipſum ratio æqualitatis,eſt vera ratio,nota vero ô non eſt numerus?

2. Rationem æqualitatis 1 ad 1 additam rationi quadruplæ 4 ad 1,non producere rationem quadruplam,vt vult Grammaticus, ſed verè quintuplam,oſtenſum eſt cap.præſenti parte 1.num.2.& 3.

Deinde qui poteſt à ratione æqualitatis 1 ad 1, auferri ratio quadrupla ? cum ratio æqualitatis iuxta ipſum ſit ratio nihili, & minor ratione exceſſiuâ quadruplâ ? idem enim hoc eſt, quod à nihilo ſeu quod nihil eſt.auferre aliquid quod eſt,à nota ô vel zero, auferre numerum 4;vtrumque ineptè.

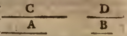
3. Rationem æqualitatis,omnium exceſſiuarum & defectiuarum eſſe minimam,planè falſum eſt:cum ratio æqualitatis ſit quidem minor omni exceſſiuâ,ſed maior omni defectiuâ: adeoque intra vtramque media, vt fatetur ipſe pag.109.vnde hic ſibi contradicit Grammaticus.

4. Rationem æqualitatis cum alia quauis poſſe comparari, atque id non eſſe idem,quod nihilum ô conferre cum numero, euidens eſt ex eo, quod ratio æqualitatis ſit vera ratio, propriam habens quantitatem & nullo modo ſit ratio nihili,ſeu vt in numeris nota ô ſeu zero, ſed reſpectu aliarum rationum,ſit vt in numeris,vnitas:quæ omnia parte 2. huius cap.oſtenſa ſunt.

Tot igitur grauiſſimos errores hic protulit Grammaticus quot dogmata & ſententias.

CAPVT VNDECIMVM.

De Rationum æqualitate.



PRæcedenti capite,de ratione æqualitatis ſatis ſuperque actum;de rationum æqualitate agendum modo: ac primo quidem, æqualitatis ratio, à rationum æqualitate,diſtinguenda eſt: æqualitatis ratio inter duos conſiſtit terminos æquales. æqualitas rationum,inter duas conſiſtit rationes æquales,ſiue illæ maioris ſint inæqualitatis,ſeu minoris, ſiue illarum termini ſint commenſurabiles, ſiue non. ſic ſi A dupla fuerit B, & C diameter quadrati A, D vero diameter quadrati B, ratio A ad B æqualis eſt rationi C ad D,& vtraque ratio eſt rationalis: ratio item C ad A, æqualis eſt rationi D ad B,& vtraque ratio eſt irrationalis.

PARS PRIMA.

Explicatur definitio 6. lib. 5. Euclidis de æqualitate rationum.

EVclides lib.5.def.6. eas rationes æquales eſſe, ſiue eas magnitudines in eadem ratione eſſe pronunciat, *quarum prima ac tertia æquemultiplicia,à ſecunda & quarta æquemultiplicibus, qualiſcunque ea ſit multiplicatio, vtrumque ab vtroque,vel pariter deficiunt, vel pariter æqualia ſunt, vel pariter excedunt.*

Definitio hæc à multis obſcurior habetur, quod ex illo æquemultipli-

cium pari excessu, æqualitate, aut defectu, non ilico appareat rationum æqualitas, vnde à nonnullis plane reiecta, ab aliis alia in locum substituta, à paucis vt idonea probata. & vt quod res est fatear, negare non possum, aliquid illi obscuritatis inesse, & illius cum æqualitate connexionem, licet certa & infallibilis sit, non vsque adeo esse euidĕtem, vt nolentem ad assensum cogat.

Quia tamen eadem à tanto Geometra proposita est, à quo qui recedit, Geometriam deserit, malui explicando aliquid illi lucis affundere, quam aut reiicere, aut aliam eius loco substituere. semper enim aduerti, recentiores qui antiquam Geometriam corrigere satagunt in errores longè turpissimos incidere. pro dilucidatione igitur Euclideæ definitionis

Notandum 1. magnitudinem vnam alterius dici multiplicem, cum minor metitur maiorem, seu cum minor à maiore aliquoties v.g. bis, ter, &c præcisè continetur. illas vero magnitudines commensurabiles dici, quas eadem metitur mensura.

Notandum 2. dum quatuor sunt magnitudines, quarum tertia æquemultiplex dicitur quartæ, quam prima sit secundæ: æquemultiplicitatem illam, duplicem esse, seu duobus modis posse intelligi. 1. prout æquemultiplicitas illa dicit commensurabilitatem seu multiplicitatē antecedentiū ad consequentia, & sic tertia æquemultiplex dicetur quartæ, quā prima sit secundæ, cum tertia toties præcise continet quartam aut partē huius aliquotam, quoties prima præcisè continet secundam, aut partem eius aliquotam similem priori; adeoque supponit terminos esse commensurabiles. 2. & aliter æquemultiplicitas intelligi potest, prout abstrahit à commensurabilitate aut incommensurabilitate terminorū. & sic non supponit aut infert multiplicitatem antecedentium respectu consequentium, sed parem excessum, aut defectū, aut æqualitatē aliarum magnitudinū, quæ antecedentiū sunt pari numero multiplices, ab aliis magnitudinibus, quæ consequentium pari numero multiplices sunt, sic tertiam esse æquemultiplicem quartæ, quam prima sit secundæ, non dicit tertiā tam esse multiplicē quartę, quā prima sit secundæ, aut quartam toties præcise contineri à tertia, quoties secunda continetur à prima, aut tertiā tā esse cōmensurabilem quartæ, quam prima sit secundæ; sed dicit primæ ac tertiæ æquali numero multiplices, à secundæ & quartæ æquali numero multiplicibus, vtrasque ab vtrisque vel pariter deficere, vel pariter æquales esse, vel pariter excedere.

Notandum 3. dum definitio alicuius rei petitur, nil aliud peti quam enuntiationem, quæ ita primum ac genuinum rei definitæ conceptum ingeneret, vt definitio & res definita, sint synonima & conuertibilia.

His prænotatis: definitionem æqualitatis rationum, ex rei natura, & vt puto ex ipsâ Euclidis mente sic formo.

Illa rationes æquales sunt, quæ inter terminos consistunt æquemultiplices. Terminos autem illos æquemultiplices voco, quorum primi ac tertÿ æquali numero multiplices, adeoque commensurabiles; à secundi & quarti æquali numero multiplicibus & commensurabilibus, vtrique ab vtrisque, vel pariter deficiunt, vel pariter sunt æquales, vel pariter excedunt.

Definitionem hanc bonam & genuinam esse, patet 1. ex eo quod talem rei definitę conceptum intelligenti indet, quo prior dari non potest; quemcunque enim conceptū de æqualitate rationū, prout rationales & irrationales complectitur formaueris, deprehendes ilico, proprietatem aliquam, naturâ posteriorem inuolui. patet 2. ex eo quod definitio & res

definita,

definita, plane sint synonima & conuertibilia: nam duarum rationum terminos esse æquemultiplices, & rationes esse æquales, ita res vna eademque sunt, vt neutra prior alterâ sit, aut concipi absque alia possit.

Ex his collige 1. obscuritatem Euclideæ definitionis prout verba illius sonant, inde meo iudicio ortam, quod definitionis explicationem potius, quam ipsam definitionem contineant, aut simul cum hac inuoluant.

Collige 2. male Euclidem à recentiori nonnullo argui, quasi proprietatem pro definitione attulerit: falsum id enim esse ex definitione iam explicata, manifestum est. deinde vt definitio illa per proprietatem facta esset, an idcirco vitiosa aut non legitima? ridiculum: innumeræ in geometria sunt, quæ non fiunt per genus & differentiam, sed vel per proprietatem, vel descriptionem. en ex multis paucas. lib. 1. circulus definitur, figura plana sub vna linea comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum quæ intra sunt, omnes rectæ ductæ, inter se æquales sunt: lib. 3. similia circulorum segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales. l. 5. cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam habere rationem dicitur eius, quam prima habet ad secundam. lib. 6. ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem. lib. 11. sphæra est, quando semicirculus manente diametro circumductus, in seipsum reuoluitur. conus est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursum reuoluitur. pari ratione definitur cylindrus, & ab Archimede Conoides parabolicum & hyperbolicum, sphæroides, spiralis &c. quas definitiones si per genus & differentiam factas asseris, eodem iure & sextam lib. 5. per genus & differentiam factam assero.

Collige 3. male rursum Euclidem ab eodem recentiore argui, quod connexionem multiplicium cum rationum æqualitate non demonstrarit: quamuis enim id facile potuisset geometra egregius, cum ex ipso id alij deinde fecerint, nullo tamen modo demonstrare debuit, cum ad definitionem non demonstratio, sed sola rei veritas requiratur. nullus enim vnquam teste Proclo, Geometra quæsiuit definitiones aut principia demonstrari; hoc ipso enim & definitiones & principia esse desinunt, quo demonstrantur.

PARS SECVNDA.

Expenditur indicium æqualitatis rationum à recentiore quodam assignatum.

DEfinitionem Euclidis, tanquam indicium æqualitatis rationum, nimis remotum & implexum, vbi reiecit recentior ille, aliud eius loco clarissimum vt ait, & magis primum ac immediatum substituit: illud autem est huiusmodi.

Rationes maioris inæqualitatis, æquales sunt, quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquota quæcunque, in antecedentibus æquali semper numero continentur. porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablata quoties possunt, æquali numero sunt ablata: ex quo rationum irrationalium æqua-

 litas

litas & inæqualitas continuo elucescit, cum sic antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata consequentibus commensurabilia & proportionalia exhauriantur.

In hoc æqualitatis indicio nonnulla aduerto. ac

1. Quidem illud, quantum ad rationes rationales pertinet (quæ tum nimirum sunt æquales, *dum consequentes ipsæ & consequentium similes partes aliquotæ in antecedentibus æquali semper numero continentur*) nil noui continere ac diuersum ab eo, quod Clauius scribit ad defin. 8. lib 5. & reiicit: verba Clauij sunt: *si Euclides de rationibus dumtaxat rationalibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit: nimirum magnitudines proportionales sunt, cum prima secundæ, & tertia quartæ æquemultiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, vel certè vt nos ad eam definitionem addidimus, cum prima secundam & tertia quartam æqualiter continet eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. potuisset inquam Euclides ita definire si de solis rationalibus ageret. quoniam vero non solum proportiones rationales, sed irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor proportionales definire.* &c.

Aduerto 2. in eodem indicio, prout irrationales & rationales complectitur, committi circulum. quæritur enim quid sit quatuor magnitudines esse *Proportionales*, aut quo indicio id sciri possit. respondetur; tum *Proportionales* esse dum consequentes ipsæ & consequentium *Similes partes aliquotæ* in antecedentibus æquali numero continentur, hoc est, ablatę quoties possunt, æquali numero sunt ablatæ, quia sic antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata consequentibus commensurabilia & *Proportionalia* exhauriuntur. in his inquam circulus committitur, 1. quia partes aliquotas esse similes, idem est ac proportionales esse, de quibus quid sint quæritur. 2. quia jubetur fieri exhaustio per ablata consequentibus *Proportionalia*, de quibus est quæstio, quid sint.

Aduerto 3. in eodem indicio, non euitari (quod tamen maximè intendit) æquemultiplicia. nam consequentes ipsas & consequentium similes partes aliquotas æquali numero in antecedentibus contineri, seu quantum possunt auferri &c. nil aliud significat, quam antecedentes esse æquemultiplices consequentium, aut partium aliquotarum similium. & cum præterea fieri debeat exhaustio, per se obscurissima & quæ primum ab Euclide lib. 10. proponitur, manifestum est indicium à recentiore illo allatum, vt omni alio vitio careret, Euclidæo non modo non esse clarius & immediatius, sed multo obscurius ac remotius.

PARS TERTIA.

Exhibentur aliquot proprietates æqualitatis Rationum.

DEclaratâ naturâ & essentiâ æqualitatis rationum, superest vt proprietates & affectiones nonnullas exhibeamus, vt quibus natura æqualitatis minus perspecta est, per proprietates eiusdem magis innotescat.

1. Proprietas ab Euclide proponitur his verbis lib. 6. propos. 16. *Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum,*

gulum, æquale est ei quod sub mediis comprehenditur rectangulo.

2. Ab eodem proponitur ibidem propos.17. *si tres lineæ fuerint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur quadrato.*

Vtraque hæc assertio præclara est, & magnum in tota geometria habet vsum, vti & reliquæ, quas Eucl. l. 5. permutádó, inuertendo, diuidendo, componendo & ex æquali demonstrat, quas studio hîc omitto, quia propriè spectant ad modos argumentandi ex rationibus æqualibus.

3. Ab eodem proponitur lib. 5. propos. 25. *si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima, reliquis duabus maiores erunt.*

4. Ibidem à Commandino additur: *si tres magnitudines fuerint proportionales, maxima & minima, maiores erunt quam dupla reliqua.*

Nota: 1. & 2. proprietatem in hoc differre à 3. & 4. quod in duabus prioribus, agatur de multiplicatione seu ductu terminorum proportionalium in se inuicem; in posterioribus autem, de eorundem additione.

5. Ab Auctore oper. Geom. proponitur lib. 8. propos. 108. *si quatuor magnitudines fuerint proportionales: quadratum prima, & rectangulum sub secunda & tertia, & quadratum quarta, in continua sunt analogia.*

A C 6. Ibid. propos. 83. *Si ratio A ad B sit æqualis rationi C ad D, ratio A ad B ducta in rationem D ad C, producet rationem æqualitatis.*
B D

A B C 7. Ibidem propos. 127. *sint A, B, C, in continua analogia: ratio A B ductain B C, est ad rationem C B ductam in B A, vt A ad C, ad C ad A.* sic enim corrigendus est error typographicus, qui in propositionem illam irrepsit.

A B C 8. Ibid. propos. 138. *sint A B C in continua analogia, & quæuis ponatur Z. rationes A Z, B Z, C Z, item Z C, Z B, Z A in continua erunt analogia.*
Z

Plures ibidem vide: propos. 139. 140. 146. 154. &c. item lib. 3. de progression.

CAPVT DVODECIMVM.

De mutuo Rationum excessu & defectu secundum quantitatem.

Ostensum est cap. 1. huius, rationes veras esse quantitates: ostensum insuper cap. 3. aliud esse comparare rationes inter se secundum quantitatem, aliud secundum multiplicationem: quæritur modo, cum vna ratio dicatur alterâ maior, minorúe, aut illi æqualis, vnde desumi debeat illa maioritas aut minoritas rationum: contendunt aliqui, rationem eam maiorem debere dici alterâ, quæ respectu eiusdem tertiæ, magis est multiplicata, quidquid sit de illarum denominatoribus siue quantitatibus. pro quo sit

PARS

PARS PRIMA.

An maioritas vnius rationis super alterâ, desumenda sit pænes multiplicationem.

CErtum est ex antiquis Auctoribus omnino nullum pro affirmatiua propositæ quæstionis stare: tum quia Euclides, aliique, maioritatem vnius rationis super alia, desumunt pænes æquimultiplices, quæ nihil minus quam multiplicationem inuoluunt, tum quia ex hac opinione ea necessario consequuntur, quæ minimè cum illorum doctrina consistunt, vt mox ostendam.

1. Pappus Alexandrinus, Theon, Nicomachus; Eratostenes, aliique antiquiores, rationes omnes inæqualitatis & analogias deducunt ac formãt ex ratione æqualitatis, per solam additionem terminorum (nusquam mentionem vllam facientes de multiplicatione) & in illam vicissim resoluunt; igitur ex illis nemo maioritatem aut minoritatem desumpsit, pænes minorem aut maiorem multiplicationem.

2. Sint quatuor continuè proportionales A, B, C, D, minoris inæqualitatis. A B C D demonstrat Euclides: 8. v. rationem A ad C, eiusdem ad minorem, maiorem esse ratione A ad D; eiusdem ad maiorem: & tamen ratio A ad D, magis est multiplicata eiusdem rationis A B, quam sit ratio A ad C: maioritas igitur rationis vnius super alia, non desumitur pænes maiorem multiplicationem;

3. Omnis ratio minoris inæqualitatis, multiplicata est cuiusuis alterius rationis minoris inæqualitatis, quæ priori maior est, vt demonstrabo cap. 15 huius. A B C D & patet in quatuor continuè proportionalibus minoris inæqualitatis A, B, C, D: nam ratio A ad D minor est ratione A ad B, & tamen illa, huius est triplicata. rursum igitur maioritas rationis peti non potest ex maiori multiplicatione.

4. Datæ sint duæ rationes contrarij ordinis, vna maioris, altera minoris inæqualitatis: exhiberi possunt illarum denominatores, adeoque vtra, alterâ secundum quantitatem sit maior, minorúe, vt ostendi cap 7. & tamen illæ comparari inter se non possunt secundum multiplicationem, neque exhiberi, vtrum, & quoties vna alterius sit multiplicata, (vt demonstrabo cap. 19.) neque cum eadem tertia quoad multiplicationem conferri vt ostendi parte 2. cap. in hyperbola ad coroll. Censoris: maioritas igitur & minoritas rationum aliunde petitur, quam ex multiplicatione.

Denique vnicum contrariæ opinionis fundamentum est, quod rationum natura, ita à multiplicatione dependeat, vt illæ inter se conferri non possint, quam secundum multiplicationem, adeoque illarum quantitates sint vel logarithmi vel spatia hyperbolica: quæ duo cum euidenter falsa esse ostenderim cap. 9. nouitatem illam quoque corruere necesse est.

PARS

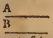
PARS SECVNDA.

Vnde desumi debeat maioritas rationum secundum quantitatem.

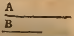
EVclides lib. 5. defin. 8. maioritatem rationis, desumit ex æque multiplicibus: hoc modo; *cum vero æquemultiplicium, multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ, tum prima ad secundam maiorem habere rationem dicitur, quam tertia ad quartam.* quam definitionem non ad libitum positam, vti asserit Censor, sed optimis fultam esse rationibus, rectè ibidem ostendit Clauius, definitionemque qui intelligi debeat fusè explicat.

Verum quia illa æquemultiplicium methodus obscurior, & multis intricata visa est, hâc relictâ, videamus quibus positis vel ablatis, rationes iuxta antiquos crescant vel decrescant; atque inde certi aliquid ac definiti de rationum incremento & decremento statuamus.

1. Sit ratio quæuis æqualitatis A B, si inuariato consequente B, augeatur antecedens A, in duplum, triplum, quadruplum &c. orietur ratio multiplex, dupla, tripla, quadrupla &c. atque econtra decrescet ratio B ad A, fietque ratio subdupla, subtripla, subquadrupla &c. rursum si antecedente A inuariato, decrescat consequens B dimidiâ sui parte, exsurget A B ratio dupla, si tribus quartis quadrupla, si quinque sextis sextupla &c.



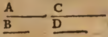
2. Sit A B ratio maioris inæqualitatis: si vel augeatur antecedens A, vel minuatur consequens B, reliquis inuariatis crescit ratio A ad B & decrescit ratio B ad A: si vero augeatur consequens B, vel minuatur antecedens A, reliquis manentibus, decrescit ratio A ad B, & crescit ratio B ad A.



3. Sit iam A B ratio minoris inæqualitatis: si vel augeatur antecedens A vel minuatur consequens B reliquis inuariatis, crescit ratio A ad B & decrescit ratio B ad A: si autem vel augeatur consequens B, vel minuatur antecedens A, reliquis manentibus iisdem, decrescit ratio A ad B, & crescit ratio B ad A.



4. Sint duæ rationes maioris inæqualitatis A B, C D: si quo excessu A superat B, eo proportionaliter C superet D: æquales erunt rationes A B, C D.



5. Sint duæ rationes minoris inæqualitatis A B, C D: si quo defectu A deficit à B, eodem proportionaliter C deficiat à D. æquales erunt rationes A B. C D. Atque hæc omnia demonstrantur facilè ex 8. v. Euclidis.

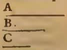


6. Sit quæuis quantitas A, cuius partes sint B & C, ponaturque quantitas quæcunque D: ratio A ad D æquatur duabus rationibus B D, C D per 114 de proport. quia vero rationes duæ B D, C D simul sumptæ, alterutrâ sunt maiores, sequitur rationem A ad D maioris ad eandem, maiorem esse

A 14	
B6	C8
D	

ratione B ad D, vel C ad D minoris ad eandem: quæ pars prima est octauæ v. Euclidis.

7. Iisdem positis: patet rationem eiusdem D ad maiorem A, minorem esse ratione D ad B vel C, minores A. quanto enim ratio A ad D maior est, tanto minor est ratio D ad A; quo enim maior est ratio A ad D, eo magis excedit rationem æqualitatis, & ratio D ad A magis deficit à ratione æqualitatis, adeoque minor est.

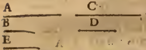


Nam sicut duarum linearum B, C, deficientium à maiori A, illa maior est quæ minus deficit à maiori A, illa vero minor quæ magis ab eadem deficit: ita rationum minoris inæqualitatis, illa maior est quæ minus deficit à ratione æqualitatis, & illa minor, quæ magis ab eadem deficit: ratio enim æqualitatis maior est quâuis ratione minoris inæqualitatis.

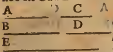
Hinc patet rationū maioris inæqualitatis, maioritatem vel minoritatē desumi pænes maiorem, vel minorē excessum super ratione æqualitatis, excessum vero illū mutari, mutatâ habitudine seu respectu antecedentis ad consequens: similiter rationum minoris inæqualitatis maioritatem & minoritatem desumi pænes maiorem vel minorem defectum à ratione æqualitatis, defectumque illum variari, variatâ habitudine antecedentis ad consequens.

PARS TERTIA

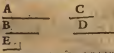
Regulæ aliquot ex quibus dignosci possit, vtra ex propositis rationibus, sit maior alterâ, minorue.



REgula 1. *Sint duæ quæuis rationes maioris inæqualitatis AB, CD: si antecedens A, maiori excessu proportionaliter suum excedat consequens B, quam C excedat D, erit AB ratio maior ratione CD.* fiat enim vt C ad D ita E ad B, erit EB ratio æqualis rationi CD: quia vero ponitur A magis excedere ipsum B, quam C excedat D, etiam A magis excedet B, quam E excedat B, igitur A maior est quam E, & per 8.v. ratio A ad B, maior ratione E ad B, hoc est C ad D.



Regula 2. *Sint duæ quæuis rationes minoris inæqualitatis AB, CD: si antecedens A, minori defectu proportionaliter deficiat à suo consequente B, quam C deficit à D, erit AB ratio maior ratione CD.* fiat enim vt C ad D, ita A ad E, erit AE ratio æqualis rationi CD; quia vero ponitur A minus proportionaliter deficere à B, quam C à D, etiam A minus deficiet à B, quam ab E; igitur B minor est quam E, & AB ratio maior ratione AE, hoc est CD per 8.v.



Regula 3. *Sint duæ quæuis rationes, & AB quidem maioris inæqualitatis, CD vero minoris: semper AB ratio maior est ratione CD:* fiat enim vt D ad C ita B ad E; erit CD ratio æqualis rationi EB, & AB ratio ad rationem EB, vt eadem ratio AB ad rationem CD: quia vero CD ratio ponitur minoris inæqualitatis, erit

& EB

& EB ratio minoris inæqualitatis, adeoque E minor quam B; sed B minor ponitur quam A, igitur E multo minor est quam A: atque vt A ad E, ita ratio AB ad rationem EB, per 2. lib. 8. oper. Geom. igitur vt A ad E ita ratio AB ad rationem CD: igitur illa, multo maior est hâc.

Regula 4. Sint quæuis duæ rationes rationales, & prima quidem sesquialtera, secunda superbipartiens tertias: multiplica 3, antecedens rationis sesquialteræ, in 3 consequens rationis superbipartientis tertias, & productum erit 9. rursum multiplica 5 alterius rationis antecedens, per 2 consequens rationis primæ, & productum erit 10. ratioque sesquialtera 3 ad 2, ad rationem 5 ad 3, vt 9 ad 10.

3 X 5
2 3

9 10.

Regula 5. & vniuersalissima. sint duæ rationes quæcunque AB, CD; siue rationales siue irrationales, siue maioris inæqualitatis siue minoris; fiatque vt D ad C ita B ad E; erit AB ratio ad rationem CD, vt A ad E per. 13. lib. de proport.

A C
B D
E

PARS QVARTA.

Reijcitur doctrina Censoris de maioritate rationum.

Contra certam hanc antiquorum doctrinam, tria adfert argumenta Censor, quorum nullum, vel ad speciem est probabile, vt iam videbimus.

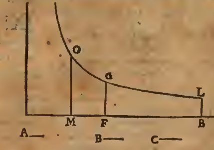
Primum est: *quod si quæpiam magnitudo, comparetur ad duas maiores, ad maximam ipsarum, maiorem habet rationem, quam ad minorem: tum quia inter ipsas maior est inæqualitas, ac proinde maior ratio, tum quia maximæ duarum maiorum, ad tertiam, maior est ratio, quam minoris: & quamuis hæc cum definitione Euclidis non conueniant, de iis propterea dubitandum non est, cum in vera rationum natura sint fundata, definitio vero Euclidis sit posita ad libitum.*

Sint tres quantitates A, B, C; quarum A minima, C vero maxima. asserit Censor, rationem A ad C, maiorem esse ratione A ad B; *tum quia inter A & C maior est inæqualitas, tum quia ratio C ad A, maior est ratione B ad A.* sed vtraque hæc ratio oppositum rectè probat. quia enim maior est inæqualitas inter A & C, quam inter A & B, ideo ratio A ad C magis deficit à ratione æqualitatis, quam ratio A ad B, adeoque ratio AC minor est ratione AB: cum enim ratio maioris inæqualitatis maior sit ratione æqualitatis, & hæc maior quâuis ratione minoris Inæqualitatis, vt ante demonstratum est, inter rationes minoris inæqualitatis, ea minor est, quæ magis deficit à ratione æqualitatis; quemadmodum inter rationes maioris inæqualitatis, illa maior est, quæ magis excedit rationem æqualitatis: tanto autem magis ratio A ad C deficit à ratione æqualitatis, quanto ratio C ad A eandem magis excedit: quanto igitur maior est inæqualitas inter A & C, quam inter A & B, quantoque CA ratio maior est ratione BA, tanto ratio A ad C minor est ratione A ad B.

B 4
A 2
C 12

Deinde, quæro ab Censore vnde rationum quantitates innotescant? haud dubiè ex mutua denominatorum habitudine, ita ipse censet defin. 6. atqui rationis AB denominator est C, & rationis AC denominator

B, vt demonſtraui ca. 6. igitur A B ratio eſt ad rationem A C, vt C ad B; at C maior ponitur quã B, igitur A B ratio maior eſt ratione A C. nullum igitur eſt argumẽtum Cenſoris primum, & doctrina illius non tantum in vera rationum natura fundata non eſt, ſed illam penitus euertit.



Secundum ex hyperbola petitur. *Sit A minor B, & hac minor C. fiatque in hyperbola vt A ad B, ita L B ad F G, & vt A ad C, ita L B ad O M. erit ſpatium L B M O quantitas rationis A ad C, & ſpatium L B F G quantitas rationis A ad B: at ſpatium L B M O maius ſit ſpatio L B F G, ergo A C ratio maior ratione A ad B.*

Argumentum hoc peccat primum, quod ſpatia hyperbolica LBMO, L B F G faciat quantitates rationum A C, A B, ſiue L B ad M O, & L B ad F G, id enim falſum eſſe oſtendi cap. 9. huius, cum ſpatia hyperbolica nil aliud repræſentent, quam multiplicationem rationum, quæ ſunt inter lineas, ſpatia illa includentes. rurſum peccat, quod ex eo quod ſpatium L B M O, maius ſit ſpatio L B F G, inferat rationem A C, maiorem eſſe ratione A B; id enim planè falſum eſt: non enim A C ratio eſt ad rationem A B, vt ſpatium L B M O ad ſpatium L B F G, ſed quã multiplex eſt ſpatium L B M O, ſpatij L B F G, toties A C ratio multiplicata eſt rationis A B. porro maioritatem rationis vnius ſuper alia, non deſumi pænes multiplicationem, oſtendi parte primâ huius.

A	B	C	D
12.	3.	12	4
A	B	C	D
17	5	12	6

Tertium argumentum ex abſurdo ducitur: *habeat A ad B maiorem rationem quam C ad D, ſitque A aqualis C. iuxta ipſos* (id eſt Euclideos) *ratio A ad C, maior eſt ratione B ad D. ideſt zero erit maior aliquo numero, & nihilum maius aliquâ quantitate, punctum lineâ: quo quid abſurdius excogitari poteſt? ſit iam A maior C, ſed B minor D; erit poſt permutationem, prima ratio maioris inaqualitatis, & ſecunda minoris, ergo quantitates contrarij ordinis, & quaſi diuerſi generis, quoad magnitudinem inter ſe comparabuntur: quod non minus abſurdum.*

At quis miretur, ex hypotheſi abſurdiſſima, ſequi abſurdum? ſupponit ille, rationem æqualitatis, eſſe zero reſpectu numeri, nihilum reſpectu quantitatis, punctum reſpectu lineæ; & ex eo præclarè infert, zero iuxta Euclidem eſſe maius aliquo numero, nihilum quantitate &c. quâ ratiocinatione quid ineptius excogitari poteſt? porro hypotheſim illam falſam eſſe, oſtendi cap. 10. huius. de rationibus contrarij ordinis quod addit, perridiculum eſt vt mox oſtendam.

PARS

PARS QVINTA.

Reiiciuntur errores Euthymij Grammatici.

NOn tot monſtra vno ſæculo producit Africa, quot enormes & monſtroſos in hac materia errores, protulit Euthymius Grammaticus: paucos hic, ne Lectori, tot naturæ abortiua proferendo, nauſeam pariam, caſtigabo.

1. Pag 76. *Differentia rationum 9 ad 6, 8 ad 6, eſt ratio 9 ad 8; ſimiliter differentia rationum 4 ad 2, 3 ad 2, eſt ratio 4 ad 3, & ſic in omnibus.*

2. Pag. 121. *Ratio dupla (2 ad 1) eſſentiâ ſuâ æqualis eſt ſubduplæ (1 ad 2) quia diſtantia magnitudinum vtriuſque rationis, eſt æqualis.*

Pag. 125. *Rationis Geometricæ natura & eſſentia, in magnitudinum quæ rationem conſtituunt, inter ſe diſtantia (quod in arithmetica ratione omnes admittunt) generaliter eſt conſtituta:*

Pag. 129. *Verum igitur eſt, 7 ad 4, maiorem habere rationem, quam 5 ad 4: at falſum, 4 ad 5, maiorem habere rationem, quam 4 ad 7.*

Falſum item eſt, 4 ad 6, maiorem habere rationem, quam 3 ad 6; verum autem, 6 ad 3, maiorem habere rationem, quam 6 ad 4.

Falſum rurſus eſt, 4 ad 3, maiorem habere rationem, quam 2 ad 3; & iſtud: 3 ad 2, maiorem habere rationem, quam 3 ad 4: quia diuerſi generis rationes, exceſſiua & defectiua, inter ſe comparari nequeant.

3. Pag. 146. *Diuerſi generis rationes exceſſiua & defectiua, quatenus vna maior aut minor eſt alterâ, comparari inter ſe non poſſunt: quod comparatio eiuſdem generis nomina requirat: quippe eodem circa eandem verſus metam decertant: & diuites cum diuitibus comparantur, debitores cum debitoribus; quare Lucius qui tria millia in bonis habet, comparari nequit cum Titio, qui quatuor millia debet: &c. exceſſus igitur & defectus inter ſe ſecundum quantitatem, hoc eſt diſtantiam à nihilo, non comparantur.*

4. Pag. 178. *Rationem 6 ad 2, non eſſe duplam rationis 3 ad 2, item rationem 8 ad 3, non eſſe duplam rationis 4 ad 3, & ſic deinceps: duplici demonſtratione oſtendam. 1. hoc aſſumpto lemmate, duplorum, duplos eſſe exceſſus, triplorum triplos, ſeſquialterorum ſeſquialteros: quippe vti 4 & 2, binario inter ſe differunt, ita illorum dupli 8 & 4 quaternario; tripli 12 & 6 ſenario &c. ſic rationes 9 ad 1 & 4 ad 1, inter ſe differunt ratione 9 ad 4: illarum duplæ 18 ad 1, & 16 ad 1, ratione bis dupli ſuper quartâ 81 ad 16: Triplæ 729 ad 1, & 64 ad 1, ratione 729 ad 64: quæ eſt rationis 9 ad 4 tripla: ſeſquialteræ 27 ad 1, & 8 ad 1, ratione 27 ad 8; quæ rationis 9 ad 4 eſt ſeſquialtera: cum itaque ſimplarum rationum 3 ad 2, 4 ad 3 differentialis ratio ſit 9 ad 8, duplarum 6 ad 2, 8 ad 3, ſeu 18 ad 16, 16 ad 6, differentialis ratio, erit ſimpla differentialis rationis dupla, nempe 81 ad 64; atqui eadem eſt quæ ſimplarum ſcil. 18 ad 16, ſeu 9 ad 8: quod eſt abſurdum: ergo rationum 3 ad 2 & 4 ad 3, non ſunt duplæ rationes 6 ad 2, & 8 ad 3.*

2. Demonſtratio eſt huiuſmodi: *aſſumpto hoc lemmate. Arithmeticæ progreſſionis numeri, quorum ſecundus primi duplus eſt, eodem exceſſu proximos binos ſe inuicem ſuperare, quo primus ſuperat nihilum: quippe eodem exceſſu quo vnitas ſuperat nihilum, binarius ſuperat vnitatem, ternarius binarium &c. cum itaq. in hac rationũ progreſſione 2 ad 2. 3 ad 2. 6 ad 2. 9 ad 2. 12 ad 2. 15 ad 2, ratio 3 ad 2 ſimpla ſit & vnitatis loco ponatur, cuius dupla eſt 6 ad 2, tripla 9 ad 2, quadrupla 12 ad 2. quintupla 15 ad 2, continebit dupla 6 ad 2, bis ſimplam 3 ad 2: atque*

duæ simplæ 6 ad 4 additæ, efficiunt rationem 9 ad 4, quæ minor est ratione 12 ad 4, quare dupla ratio 12 ad 4, maiore excessu superat simplam 6 ad 4: quam simpla superat rationem nihili 4 ad 4: quod est contra adsumptum lemma, non ergo ratio 12 ad 4 dupla est rationis 6 ad 4.

3. *Demonstratio: quoniam ratio 9 ad 4, eadem ratione 9 ad 6, superat rationem 6 ad 4, quâ ratio 6 ad 4 superat rationem nihili 4 ad 4: ratio autem 12 ad 4, superat rationem 6 ad 4, ratione 12 ad 6, quæ maior est ratione 9 ad 4; idcirco ratio 12 ad 4, maior est quam ut rationis 6 ad 4 tantum sit dupla; sed & eadem ratio 12 ad 4, rationis 6 ad 4 ponebatur dupla, ergo eadem ratio 12 ad 4, & dupla est rationis 6 ad 4, & maior quam dupla: quod est absurdum.*

5. Pag. 188. *Grandi igitur paralogismo lapsus est Gregorius à S. Vincentio, qui rationum proportionem in huiusmodi numeris constituit, ut ratio 8 ad 2 ad rationem 4 ad 2, ita ratio 6 ad 2 ad rationem 3 ad 2: neque enim quod superius demonstraui, quemadmodum rationis 4 ad 2, dupla est ratio 8 ad 2, sic rationis 3 ad 2, dupla existit ratio 6 ad 2; sed longe hæc maior est quam illius dupla.*

En lector Geometra paucas ex infinitis, monstrosas Grammatici hallucinationes: quæ quales sint, modo videamus.

1. Non distinguit Grammaticus interualla harmonica, & differentias arithmeticas, à rationibus Geometricis, sed (quod in triduano Geometra vix ferendum) confundit omnia: & cùm alibi dixerit, rationes arithmeticas & harmonicas, propriè non esse rationes, sed medietates (quod est verissimum) mox sui immemor, pag. 125, vult essentiam rationis Geometricæ consistere in interuallis & differentiis, sicut essentiæ medietatum Harmonicarum & Arithmeticarum, consistunt in interuallis & differentiis; hinc tabulas commatum, harmonicis medietatibus dimetiendis aptas, ad rationum Geometricarum quantitates mensurandas, contra omnem vsum, & rationum naturam, ineptissimè adhibet.

Porro in quo ratio ab interuallo & differentia distinguatur, ostendi cap. 1. huius sub finem: quod si rectè perceperit Grammaticus, spes aliqua affulget, vt in Geometriæ Tyronem aliquando euadat: quare paucis in gratiam Grammatici ea repetam.

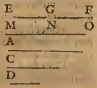
Primum igitur esto; Ratio ab interuallo & differentia distinguitur: namque secundum omnes tam antiquos quam recentiores, ab vnitate ad biuarium, & à binario ad vnitatem, vnum idemque interuallum est, nimirum vnitas, tamen ratio vnitatis ad binarium, & binarij ad vnitatem, non est eadem: hæc enim dupla est, illa subdupla, quas non esse easdem (vt vult Grammaticus) mox ostendam.

Secundum esto: in eo ratio ab interuallo & differentia distinguitur, quod differentia & interuallum, sit comparatio duarum quantitatum, in qua solùm spectatur, quantum terminus à termino differat, siue quis sit excessus maioris supra minorem, siue quis defectus minoris à maiore: Ratio autem est comparatio duarum magnitudinum, in qua solum spectatur, quoties terminus in termino contineatur siue quam relationem habeat terminus ad terminum: v.g. in his numeris, 2. 1. interuallum seu differentia est vnitas, quá duo excedunt vnum, at ratio est dupla; seu 2, bis continent vnitatem. quæ duo plane diuersa sunt: nam cognito duorum terminorum interuallo aut differentiâ, non ideo cognita est eorundem terminorum ratio: duorum ad vnum, interuallum est vnitas, item trium ad duo, interuallum idem est, nimirum vnitas, & tamen ratio 2 ad 1 dupla, non eadem est quæ 3 ad 2 sesqui: cum igitur ex noto interuallo aut differentiâ duarum quantitatum, non possit nosci earundem magnitu-

magnitudinum ratio, palam est rationem ab interuallo & differentia plane distingui, neque ista duo magis, quam cælum & terram posse confundi.

2. Quod asserit pag. 76. & alibi sæpius, nimirum propositis duabus rationibus inæqualibus v.g. 12 ad 1 & 4 ad 1, excessum quo maior minorem superat, esse rationem illam quæ reperitur inter vtriusque rationis antecedentes terminos, veluti hic, rationem 12 ad 4, plane falsum est: si enim ratio 12 ad 4 sit excessus quo ratio 12 ad 1, excedit rationem 4 ad 1, igitur ratio 12 ad 4 addita rationi 4 ad 1, æquatur rationi 12 ad 1: sicut si 3 quo 4 excedunt 1, addam ipsi 1, vnũ fit 4: atqui ratio 12 ad 4, tripla, addita rationi 4 ad 1 quadruplæ, facit rationem septuplam, ratio autem 12 ad 1 est duodecupla, igitur ratio 12 ad 4 non est excessus quo ratio 12 ad 1 excedit rationem 4 ad 1: idque vniuersale est in cæteris omnibus: falsum igitur est quod asserit Grammaticus pag. 76. & alibi. porro excessus quo ratio 12 ad 1 excedit rationem 4 ad 1, est ratio 8 ad 1, hæc enim addita rationi 4 ad 1, facit rationem 12 ad 1.

3. Quod asserit pag. 121. *Rationem duplam 2 ad 1, essentia sua æqualem esse subduplæ 1 ad 2, quia distantia magnitudinum vtriusque rationis est æqualis: v.g. inter dupla rationis magnitudines E F, G F, tanta distantia est, quanta inter subdupla rationis magnitudines M N, M O:* plane est monstrosum, & huic assertioni simile; inter magnitudines, sesquipedalem A, & pedalem C, eadem est distantia quæ inter pedalem C & semipedalem D (differentia enim vtrobique eadem est nimirum semipedalis) ergo quantitas sesquipedalis A, æqualis est semipedali D. argumentum profecto subtile, & tali Geometra dignum.



4. Quod asserit pag. 129. & seqq. nimirum in rationibus minoris inæqualitatis, quas defectiuas vocat, falsum esse, rationem 4 ad 5 eiusdem ad minorem, maiorem esse ratione 4 ad 7 eiusdem ad maiorem, absurdissimum est: cum enim vt fatetur ipse, ratio 7 ad 4, maior sit ratione 5 ad 4, quia illa magis excedit rationem æqualitatis 4 ad 4, quam hæc: insuper ipso fatente, rationes 4 ad 7, 4 ad 5, tantum deficiant à ratione æqualitatis 4 ad 4 quantum rationes 7 ad 4, 5 ad 4 eandem rationem 4 ad 4 excedunt, palam est rationem 4 ad 7 magis deficere à ratione æqualitatis, quam ab eadem deficiat ratio 4 ad 5. igitur ratio 4 ad 7 minor est ratione 4 ad 5: sicut è duabus lineis ab eadem maiore deficientibus, illa minor est quæ magis deficit, illa vero maior, quæ minus. verissima igitur & vniuersalis est propos. 8. l. 5. Euclid.

7	5
4	4
4	4
4	4
7	5

5. Quod asserit pag. 146. diuersi generis rationes, defectiuam & excessiuam quatenus vna maior aut minor alterâ est, non posse comparari, ineptum prorsus est & ageometricum: & his assertionibus simile: pars nequit comparari cum suo toto, aut totum cum parte, quia sunt diuersi generis; item quantitas pedali maior, nequit comparari cum quantitate, pedali minori, *quia excessiua & defectiua quantitates, inter se conferri non possunt: nam diuites cum diuitibus, debitores cum debitoribus comparantur, non autem diuites cum debitoribus.* quis huiusmodi ferat ineptias? Ratio subdupla 1 ad 2, bis per additionem sumpta, producit rationem æqualitatis 1 ad 1, & hæc bis sumpta per additionem, gignit rationem duplam 2 ad 1: igitur ratio dupla 2 ad 1, quadrupla est rationis subduplæ 1 ad 2, & hæc quarta

pars illius: similiter ratio tripla 3 ad 1, sextupla est rationis subtriplæ 1 ad 3, & sic de cæteris: deinde videte egregiam Grammatici contradictionem: pag. 105. *ratio dupla 2 ad 1, superat rationem subduplam 1 ad 2, ratione bis duplâ, id est quadruplâ: quia ratio nihili 1 ad 1, superat rationem 1 ad 2, ratione 2 ad 1, & rationem nihili, superat ratio 2 ad 1, ratione 2 ad 1: ergo &c.* si ratio nihili superet rationem 1 ad 2 ratione 2 ad 1 (quod plane falsum) & rationem nihili superet ratio 2 ad 1 ratione 2 ad 1 (quod etiam falsum) adeoque ratio 2 ad 1 superet rationem 1 ad 2, ratione quadrupla (quod item falsum: nam illa huius præcisè quadrupla est) igitur secundum illum, ratio 2 ad 1 comparari potest cum ratione 1 ad 2, imo de facto comparatur, dum dicitur *ratio 2 ad 1 superat rationem 1 ad 2 ratione quadrupla*, quod tamen fieri posse, deinde negat pag. 146. quid igitur mirum si Grammaticus Auctores alios non intelligat, cum nec illa quidem ipsa quæ scribit, vllo modo videatur percipere.

6. Pag. 178. & seqq. triplici demonstratione conatur ostendere, rationem 6 ad 2, non esse duplam rationis 3 ad 2. sed vt reliqua omnia, infelicissimè: nulla enim ex tribus, (præterquam quod singulæ tot pæne scateant vitiis quot verbis) speciem aut vllam formam continet syllogismi vt vel obiter legenti, etiam tyroni philosopho manifestum est: nunc vitia pauca recensebo: in 1. demonstratione, vt alia omittam, falsum est 1. ranum 3 ad 2, 4 ad 3, differentialem rationem esse, 9 ad 8. falsum est 2. rationum 6 ad 2, 8 ad 3, rationem differentialem esse, 81 ad 64: vnde nil mirum ex absurdis & falsis præmissis, inferri absurdum. in 2. demonstratione, falsum est 1. binarium eodem excessu superare vnitatem, quo vnitas superat nihilum: cum enim vnitas sit vera quantitas, comparari nequit cum nihilo, adeoque vnitas non est excessus, quo vnitas superat nihilum. falsum est 2. rationes duas simplas 6 ad 4, sibi additas efficere rationem 9 ad 4; efficiunt enim 12 ad 4. denique conclusio nulla est, neque assumptum lemma quidquã ad rem facit. in 3. demonstratione rursus falsum est 1. rationum 9 ad 4, 6 ad 4, differentialem rationem esse 9 ad 6, differentialis enim est, ratio 3 ad 4, quæ addita rationi 6 ad 4 producit rationem 9 ad 4. falsum est 2. quod ratio 9 ad 4, eodem excessu superet rationem 6 ad 4, quo hæc superat rationem 4 ad 4. ratio enim 6 ad 4 excedit rationem 4 ad 4 ratione 2 ad 4, quia hæc addita rationi 4 ad 4 facit rationem 6 ad 4. excessus vero quo ratio 9 ad 4 excedit rationem 6 ad 4, est ratio 3 ad 4.

Nil aliud igitur triplici suâ demonstratione probavit Euthymius, quã se nec philosophum, nec Geometram vllum, sed purum putum esse Grãmaticum.

CAPVT DECIMVMTERTIVM.

An rationes possint considerari vt fractiones.

Explanatis iis, quæ ad veram genuinamque rationum naturam pertinere visum est, ea superest difficultas, quæ præcipuas rationum affectiones, additionem, multiplicationem, ac compositionem innoluit: atqui in illis, recentiorum plerosque ita versari video, vt rem per se non expeditam, reddiderint intricatissimamque specie differunt, in vnum confuderint, ipsaque rerum nomina penitus immutarint, quorum errorum omnium

omnium sola atque vnica causa est, quod ad eam regulam, quam Euclides, addendis, multiplicandis, &c. iis rationibus, quæ per numeros exprimi solent, adhibuit, rationum vniuersim omnium operationes, non formarint: quare illorum errores ne seqnendo iterem, quas dixi rationum affectiones, ad Euclideam legem, quam 7, aliisque elementorum libris, præscripsit numeris, atque adeo rationibus per numeros expressis, veluti ad amussim regulamque longè certissimam, exigere consilium est. quia vero in scribendis rationum terminis, eadem quæ in fractis obseruatur methodus, operationesque integrorum à fractis in nullo differant, ad horum normam veluti commodiorem, rationum formabo proprietates; quod autea quam ago, de fractionum rationumque similitudine, & an in his perinde atque in illis procedi possit, in præsentia inquiram.

Fractio seu numerus fractus, est pars vna vel aliquot partes, integri vnius in aliquot partes æquales diuisi: vt si totum aliquod sectum sit in partes quinque æquales, sumaturque ex illis vna, vel duæ, aut tres, quæ cum omnibus integri partibus conferantur, duæ illæ, vel tres, vel vna, dicentur fractio seu numerus fractus.

Quælibet autem fractio duobus constat numeris, qui in ea proferenda exprimuntur: primus numerator dicitur, quia numerat quot partes fractio contineat ex illis, in quas totum diuisum est. Denominator appellatur alter (siue vt alij, nomen, nominator, diuisor) quia denominat partes in quas totum est diuisum; vt cum proponitur fractio continens tres quintas, numerator est 3, denominator vero 5. scribitur autem prædicta fractio (vti & reliquæ) interiectâ lineolâ, numeratorem inter & denominatorem, hoc modo $\frac{3}{5}$.

Ratio vniuersim definitur, duarum quarumcumque magnitudinum eiusdem generis, mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

In hoc igitur fractio cum ratione conuenit, quod vtraque sit essentialiter relatiua, & certa termini ad terminum eiusdem generis quoad quantitatem habitudo: illâ solum differentiâ, quod fractio sit vnius vel aliquot partium totius diuisi, ad omnes eiusdem diuisi partes habitudo, adeoque inter terminos consistat commensurabiles, ratio vero sit habitudo cuiuscunque quantitatis ad alteram eiusdem generis.

Deinde, certum est vt rectè Candalla, ea quæ Euclides de numeris demonstrat, non numeris tantum, sed qnibusuis quantitatibus & rationibus per numeros expressis, conuenire; certum insuper est, vt docet Clauius ad defin. v. lib. 6, ea quæ de numerorum proportionibus demonstrãtur, conuenire magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est proportionibus irrationalibus; cum hæ ab illis in alio non differant, quam quod illarum denominatores numeris exprimi possint, harum vero non item: quæ differentia, naturam rationum vti nullo modo immutat, ita operationes & affectiones non variat: nam additio, multiplicatio &c. quæ rationibus rationalibus conueniunt, illis non conueniunt qua rationales, sed quatenus sunt rationes. certum igitur est, in rationibus vniuersim eadem methodo procedi posse, quâ in numeris vtitur Euclides: cum autem numerorum operationes, à fractorum in nullo differant, vt demonstrant Clauius, Volumnius, aliique, manifestum est rationum operationes quoad additionem, multiplicationem &c, ad leges fractionum rectè ac legitimè formari.

Neque id Auctor operis Geom. primus aut solus fecit; multò illum

ante præiuere Salignacus lib.2.cap.1. Henifchius lib.3. Volumnius Rodulphus, Cardanus. Clauius aliique Geometræ egregij, qui præfatam doctrinam, expreffis non tantum tradunt verbis, fed vel inde maximè docent, rationum additionem à multiplicatione, fubductionem à diuifione, perinde atque in numeris diftingui planè debere. quod recentiores alij rectè fi percepiffent, non vtique tot, eofque grauiffimos errores, vbi de rationum agunt additione, &c (vti deinceps demonftrabo) accumulaffent.

At grauiter doctrina illa difplicet Cenfori, bilemque in Auctorem oper. Geom. vehementius accendit: audiatur Decretoria illius vox, quâ lectorem in exordio tractatus, quo librum de proport. cenfet, affatur. *Antequam fingulas, inquit, propofitiones recenfeam, moneo tot errorum vnicam effe caufam: vnde vix poteft nobilius exemplum adferri, quo oftendatur quam periculofus fit error in principiis: in hoc itaque falfus eft P. Gregorius, quod rationes confiderarit vt fractiones, & putauerit duos terminos qui pro denominatore rationis fingularis affignantur, quia ad modum fractionis fcribi folent, naturam fractionum earūq. affectiones fequi: vnde quidquid de fractionibus demonftratur, hic rationibus applicuit &c. vnde melius fuiffet infcriptus hic liber, de rationibus fractionum, quam de proportionalitatibus, fiue de rationibus rationum: quare fi omnes eius propofitiones fractionibus applicentur, vera effe deprehendentur, & hic faltem erit tanti tractatus aliqualis vfus.*

Præclara hæc eft cenfura, & tam vanitatis quam falfitatis plena: cenfuram & illa viciffim quam meretur non euaderet, fi perinde mihi atque illi lubuit, luberet ineptire. vnum illud Cenforem moneo, res geometricas melius inpofterum vt expendat, priufquam ad cenfuras fimiles, immaturæ confiderationis indices, deueniat.

Reiiciuntur errores Euthymij Grammatici.

PRiori Cenfuræ fimilem dedit Grammaticus pag.203. his verbis: *hoc autem maximè animaduerfione dignum, non tantum falfa hac Gregorij Theoremata, fed & omnes veterum ac iuniorum paralogifmos, ex eo fonte manaffe, quod Geometricas rationes, & minutias Arithmeticas eandem contemplationem admittere putarint.*

Pag.132. duplicem tradit minutiarum confiderationem, quarum vnā vult rationibus geometricis conuenire, aliam non: vnde illam geometricam vocat, hanc vero Arithmeticam. *Geometricè confiderantur minutiæ, quatenus fpectantur fecundum diftantiam antecedentis feu numeratoris à confequente feu denominatore; Arithmeticè vero, quatenus numerantur partes integri.*

Porro *minutiæ differunt à rationibus Geometricis, quod rationis duo termini, vnam duntaxat notionem ingerant, fpatium nempe inter vtrumque terminum interiectum. minutiæ autem duo termini, duas notiones includunt, numeratoris à denominatore diftantiam, & partium denominatoris numerationem: quam ob rem fecundum geometriam, ratio 6 ad 4, æqualis eft duabus rationibus 6 ad 5 & 5 ad 4. at minutia* $\frac{6}{4}$ *fecundum Arithmeticam, æqualis eft duabus minutiis* $\frac{5}{4}$ $\frac{1}{4}$*: atque hinc quoque eft, quod omnes minutiæ inter fe fint commenfurabiles, cum contra diuerfi fundi rationes, nullam communem menfuram admittant, adeoque nec rationem inter fe habeant effabilem. vnde porro liquet, rationum ac minutiarum diuerfam effe additionem & fubtractionem. præterea minutias ob denominatoris*

natoris illam numerationem per numeros multiplicari posse ac diuidi, rationes vero nequaquam; Euclides verò ex Arithmeticâ consideratione minutiarum, quatenus partes integri numerantur, falsum istud Theorema (8.v.) *fabricauit.*

Multiplex hic rursus error. 1. quod Geometricè velit considerari minutias, dum distantia termini à termino, seu numeratoris à denominatore consideratur, id enim falsum est: quemadmodum enim rationis essentia non consistit in distantia antecedentis à consequente, sed in mutua illorum relatione, ita minutiæ (quæ Geometricè consideratæ, sunt veræ rationes) non dicuntur geometricè spectari, dum consideratur distantia numeratoris à denominatore, (hæc enim potius est arithmetica consideratio sicut interuallorum aut differentiarum in numeris contemplatio) sed dum consideratur habitudo seu mutua relatio termini ad terminum, numeratoris ad denominatorem.

2. Quod ratio 6 ad 4 sit æqualis duabus rationibus 6 ad 5. & 5 ad 4. id enim plane falsum est: ratio enim 6 ad 4, æqualis est duabus rationibus 5 ad 4 & 1 ad 4; hæc enim addita rationi 5 ad 4, facit rationem 6 ad 4. prout minutia $\frac{6}{4}$ geometricè æqualis est duabus minutiis $\frac{5}{4}\frac{1}{4}$.

3. Quod diuersi fundi rationes nullam communem mensuram admittant, adeoque nec rationem habeant effabilem: id enim falsum esse ostendi cap. 4. sub finem.

4. Quod rationum ac minutiarum diuersa sit additio & subtractio; hoc enim falsum esse patebit ex cap. seq.

5. Quod rationes per rationes non possint multiplicari; quod falsum esse ostendam cap. 15. huius.

6. Quod Euclides ex arithmeticâ minutiarum consideratione falsum Theorema (8. lib. v.) fabricarit; id enim apertè falsum est: Euclides enim ex verè Geometricâ rationum consideratione, verissimum Theorema confecit: vt ostensum cap. 12. huius.

CAPVT DECIMVMQVARTVM.

De Rationum additione.

DE Rationum additione scripsere Nabodus, Nonnius, Tartaglia, Lucas, Cardanus, Gemma Frisius, Tonstallus, Butheo, Ramus, Gosselinus, Salignacus, Henischius, Mycillus, Stifelius &c. sed illorum plerique, loco additionis, faciunt veram rationum multiplicationem; & quod per ridiculum est, cum in rationum compositione, solam agnoscant additionem, nil minus agunt, quam rationes addere; & quod minimè volunt, rationes nimirum multiplicare, id vnicè agunt.

PARS PRIMA.

An additio rationum ab earundem multiplicatione differat, & in quo.

O*stensum est cap.* 1. Rationes, æque veras esse quantitates, atque sunt lineæ, superficies &c. adeoque eas omnes illis deberi affectiones, quæ his communes sunt: atqui longè diuersa sunt, lineam lineæ, super-

 ficiem

ficiem superficiei addere, & lineam in lineam, superficiem in superficiē ducere; necessario igitur etiam differunt, rationum additio, & earundem multiplicatio.

Secundò: ostensum est cap. praeced: rationes rectè considerari vt fractiones; & iisdem vtrarumque affectiones legibus constringi, : cum itaque tam in numeris integris, quam fractis, specie differant, additio & multiplicatio, easdem etiam in rationibus differre specie, manifestum est.

Tertiò: datis tribus v.g. rationibus quibusuis, duplâ, triplâ, quadruplâ; certum est, aliam prodire summam ex additione denominatorum illarum rationum, aliam ex eorundem multiplicatione; nam ex additione denominatorū 2,3,4, summa est 9; ex multiplicatione, summa est 24: atqui rationes se habent vt denominatores, aliud igitur producitur ex additione rationū, duplae, quadruplae, triplae, aliud ex earundem multiplicatione; & sicuti denominatorum additio, specie differt ab eorūdem multiplicatione, ita quoque rationum additio, specie differt ab earundem multiplicatione.

Quartò: datis tribus continuè proportionalibus, 9. 3. 1. ratio 9 ad 1, secundum omnes, bis continet rationem triplam, 3 ad 1: atqui continentia illa, non est additionis, sed multiplicationis; vt ostendi cap. 3. aliud igitur est rationes per additionem copulare, aliud per multiplicationem.

Denique praeter antiquos, idem docent, Candalla, Salignacus, Cardanus, Clauius &c. & Cardanus quidem lib. 5. de proportionibus, propos. 12, his proponit verbis: *propositis duabus proportionibus, vnam alteri iungere, absque multiplicatione*; quam deinde ibidem demonstrat. Salignacus lib. 2. ca. 14: *rationem, inquit, duplicare, triplicare, quadruplicare, non est rationem bis, ter, aut quater positam addere, vt vulgus existimat, sed eam continuè in se, bis, ter, quater positam multiplicare: ratio 3 ad 1, bis, ter, quater posita sibi addita, est 6, 9, 12: at eadem bis, ter, quater posita continue in sese multiplicata, est 9, 27, 81. quid ita? quia in additione, summa additis, vt totum suis partibus aequatur, at in multiplicatione, vt vnitas ad alterum multiplicantium, sic reliquus est ad factum.* idē fusè ostendit Clauius ad finem lib. 9.

Differt igitur rationum additio, ab earundem multiplicatione, sicut fractionum additio, ab earundem multiplicatione; lineae ad lineam additio, ab earundem in inuicem ductu.

PARS SECVNDA.

Quomodo fiat rationum additio.

QVoniam rationum additio ab earundem multiplicatione specie differt, vt paulo ante ostensum, vocetur *rationum additio, duarum vel plurium rationum, in vnam rationem, collectio.*

Triplici methodo ea perfici potest; vnâ quam Arithmetici minutiis in vnam summam colligendis adhibent. geminâ alterâ, quâ vtitur Auctor oper. Geom.

Porro minutiarum collectio sic instituitur: sint duae minutiae diuersarum denominationum addendae $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ multiplica 2 numeratorem

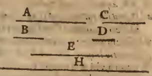
prioris,

prioris,per 4 denominatorem posterioris,in formam crucis: item 3 numeratorem posterioris,per 3 denominatorem prioris: productosque numeros, 8 & 9, in vnam summam collige,vt fiat numerator 17: dein productum ex multiplicatione denominatorum 3 in 4. nempe 12, erit denominator minutiæ collectæ,quæ erit $\frac{17}{12}$

Methodum hanc addendis rationibus sic applicabimus; sint duæ quæuis rationes addendæ A B, C D. duc A in D, & productum sit F. duc C in B, & productum sit G: aggregatum ex F & G, esto K. denique productum ex D in B, sit L; erit ratio K ad L, summa rationum A B, C D sibi additarum.

12 A C 8 | K 56
4 B D 2 | L 8
F 24. G 32

Geometricè autē quascunque duas rationes in vnam colligemus, hoc modo. sint duæ rationes A B, C D: fiatque vt D ad C, ita B ad E: aggregatum ex A & E, ponatur H: dico rationem H ad B, summam esse rationum AB, CD.



cum enim rationi CD; æqualis ex constr. sit ratio E B, igitur A B ratio, vna cum ratione E B, æquatur rationi A B, vna cùm ratione CD: quia vero aggregatum ex A & E, ponitur H; ratio H ad B (per 114, de proport.) æquatur duabus rationibus A B, E B, hoc est rationibus A B, C D: ratio igitur H ad B, summa est rationum A B, C D.

Hanc autem veram ac legitimam esse colligendis in vnam rationibus methodum, ex eo collige; quod eadem per hanc producatur ratio, quæ per praxim arithmeticam prius exhibitam: apponantur enim quatuor terminis A, B, C, D, iidem numeri, quibus antea vsi fumus: sitque A 12, B 4, C 8, D 2. & fiat vt D 2 ad C 8, ita B 4 ad E; erit E 16. summa autem ex A 12 & E 16, sit H 28. erit ratio H ad B, ratio 28 ad 4, quæ eadem est cum ratione K ad L, 56 ad 8.

12 A C 8
4 B D 2
E 16
H 28

Sint iam duæ minutiæ addendæ eiusdem denominationis, A B, C D; adde A ipsi C, & summa sit F; cui suppone communem denominationem G; erit minutia F G, summa minutiarum A B, C D. simili prorsus modo, fiet additio duarum rationum commune habentium consequens: sint quæuis rationes duæ K L, M L; adde K ipsi M, & summa sit P; erit ratio P ad L, æqualis duabus rationibus K L, M L, per 114 de proport.

A 3 C 4 | F 7
B 10 D 10 | G 10
K M | P
L | L

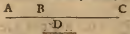
Porro vniuersalis & facillima rationes addendi methodus, est huiusmodi: sint duæ rationes AB, CD, quas addere oporteat: reuocentur illæ ad commune consequens, hoc modo: fiat vt D ad C, ita B ad E; tum A, addatur ipsi E: dico rationem A E ad B, siue F ad G, esse summam rationum A B, C D sibi additarū. patet: nam per 114 de proport, duæ rationes A B, E B, simul sumptæ, æquales sunt rationi ex A & E ad B; est autem per constr. ratio E B, eadem quæ ratio C D, igitur etiam duæ rationes A B, C D simul sumptæ, æquales sunt rationi ex A & E ad B, siue rationi F ad G.

E4
A6 C8
B2 D4
F10.
G2.

Assumpsi in hac demonstratione & prioribus, propositionem 114 de proportionalitatibus;

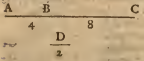


Quæ eſt huiuſmodi. *Data ſit quæuis quantitas AC, vtcumque diuiſa in B; & alia quantitas D: dico rationem AB ad D, vnà cum ratione BC ad D, æqualem eſſe rationi AC ad D.*

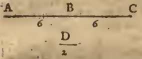


Propoſitionem hanc ita perſtringit Cenſor AA: *eſt falſa hæc propoſitio: cumque huic innitatur tota quadraturarum moles, paulò eſt examinanda. ratio AC ad D, eſt æqualis rationibus AC ad AB, plus AB ad D: ergo rationes AC ad AB, plus AB ad D, æquantur rationibus AB ad D, plus BC ad D; ergo rationes AC ad AB, & BC ad D, ſunt neceſſario æquales; quod eſt falſum: cum quantitas AC, diuiſa ſit vtcunque. ſed ſit AB, æqualis D. cum ratio æqualitatis alteri iuncta nihil immutet, erit ratio BC ad D, æqualis rationi AC ad D: pars toti, quo nihil abſurdius.*

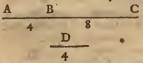
Doleo ex animo Cenſorem tam vbique in ſuis demonſtrationibus eſſe infelicem: ecce in prima demonſtrationis linea, quam præclarè paralogiſet: *ratio inquit AC ad D, eſt æqualis rationibus AC ad AB, plus AB ad D.* quæro, vbi & à quo, id vnquam ſit demonſtratum? an à Cenſore? quâ ratione? cur demonſtratio non adfertur? an aſſertio illa tam clara eſt, vt demonſtratione non egeat? at illam falſam eſſe, ſic in numeris demonſtro.



Sit AC primum inæqualiter diuiſa in B. & AB quidem ſit 4, BC verò 8, at D 2. ratio AC ad D, in minimis numeris, eſt ſextupla; ratio AC ad AB, eſt tripla; & ratio AB ad D dupla: tripla autem plus duplâ, facit quintuplam: rationes igitur AC ad AB, plus AB ad D. non ſunt æquales rationi AC ad D, quæ ſextupla eſt.



Rurſum ſit AC diuiſa bifariam in B; & AB quidem ſit 6, vti & BC; D vero 2. ratio AC ad D, eſt ſextupla; ratio AC ad AB dupla, & ratio AB ad D tripla: ſed dupla plus triplâ facit quintuplam, rationes igitur AC ad AB, plus AB ad D, non æquantur rationi AC ad D, quæ ſextupla eſt.



Tertiò ſit AC inæqualiter diuiſa in B. & AB quidem ſit 4. BC vero 8. at D 4, æqualis AB. ratio AC ad D eſt tripla, ratio quoque AC ad AB tripla eſt, ratio autem AB ad D, æqualitatis 1 ad 1; triplæ autem ſi addatur ſimpla 1 ad 1, facit quadruplam, vt oſtendi cap. 9. rationes igitur AC ad AB, plus AB ad D, non ſunt æquales rationi AC ad D, quæ tantum tripla eſt.

Infeliciſſima igitur Cenſoris eſt demonſtratio, veraque manet & inconcuſſa Auctoris propoſitio.

A8 C3 E24
B3 D2 F6.

Rationum additionem hâc methodo inſtituũt ex ſupradictis Auctoribus, plerique: ſint AB, CD rationes quæuis duæ in vnam colligendæ. duc A in C, & productum ſit E. duc B in D, & productum ſit F. ratio E ad F, erit ſumma rationum AB, CD in vnam collectarum. atque hinc inferunt rationum additionem, à multiplicatione fractionum non differre:

At

At in vtroque vehementer sunt decepti; cum operatio illa, non sit rationum additio, sed vera earundem multiplicatio, vt patebit ex sequenti capite.

Quæ Euthymius Grammaticus de rationum additione tradit, partim reliquis erroribus sunt conformia, partim adeo inepta, vt iis vel recensendis, pudeat inhærere.

CAPVT DECIMVMQVINTVM.

De Rationum compositione & multiplicatione.

PARS PRIMA.

De compositione.

POsteaquam Euclides lib.5.defin.10.de iis rationibus egit, quæ inter extremos continuè proportionalium terminos existunt; & primæ quidem ad tertiam, rationem vocauit duplicatam eius, quam habet prima ad secundam; primæ vero ad quartam, eiusdem triplicatam &c. ad pleniorem rationum doctrinam, docet lib.6.defin.5. eam rationem, quæ inter extremos terminos, interiectis quotuis & quibusuis aliis eiusdem generis existit, componi ex omnibus rationibus, quæ reperiuntur inter quantitates interiectas. atque de hoc nulla inter Auctores est controuersia: cùm id ab Euclide, Apollonio, Archimede, Pappo, Theone, totaque Geometria hucusque admissum sit vt indubitatum, & infallibile: de modo autem quo compositio illa fiat, magna. Nabodus enim, Gosselinus Butheo, Ramus, Tartaglia, Gemmafrigius, Mycillus, Henischius, Tonstallus, aliique complures, contendunt rationum compositionem, nil aliud esse, quam earundem additionem; & quæ quidem fieri debeat ad eam normam, quâ minutiarum multiplicatio: cuius opinionis, solum & vnicum fundamentum est; quod alia præter additionem, non detur rationum copulatio. at verior & omnino tenenda est sententia Clauij, Candallæ, aliorumque Euclidem & antiquos sequentium, quæ docet in rationum compositione, nullam aliam interuenire operationem, quam rationum multiplicationem ab earundem additione, specie distinctam:

Quæ veritas plurium demonstrationibus confirmata cum sit, vnicam breuitatis causa, ex Clauio adferre non pigebit.

A6.	C12	
B2.	D4	
E	F	G
72	8	24

Sint, duæ rationes A B, C D qualescunque; ducatur A in C, & producat E. ducatur B in D, & producatur F. dico rationem E ad F, productam esse ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D. fiat enim G, ex B in C. quia ex A, B in C, fiunt E, & G; erit vt A ad B, ita E ad G, per 18.7. rursus, quia ex B in C, D; fiunt G & F, erit vt C ad D, ita G ad F, per 17.7. componitur autem ratio E ad F, ex rationibus E ad G, & G ad F ex defin.5.6. igitur eadem proportio E ad F, componitur ex rationibus A ad B, & C ad D; cum hæ eædem sint quæ E ad G, & G ad F. cum autem compositio rationum ab Euclide descripta, respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio,

tio, à multiplicatione denominatorum non differat, liquidò constat, cōpositionem illam rationum esse multiplicationem, quam tradidimus. aliâ demonstratione perficit idem sub finem lib. 9, vbi docet, minutiam vnam per alteram multiplicare.

Eadem veritas patet ex absurdis, quæ necessario consequuntur, si cōpositio rationum sit earundem additio. si enim ita sit, igitur ratio ex pluribus rationibus composita, est verè totum quidpiam, cuius partēs sunt rationes, ex quibus sibi additis, componi dicitur: igitur in his tribus terminis 1, 10, 100; ratio 1 ad 100, erit duplo maior, ratione 1 ad 10; siue erit coaceruata ex duabus rationibus æqualibus, 1 ad 10, & 10 ad 100, sibi additis. hoc posito, quis non videat, partem suo toto esse maiorem? nimirum rationem 1 ad 10, quæ pars est, maiorem esse ratione 1 ad 100? in his autem 4. 4. 4. partem esse æqualem toti? rursum in his non continuè proportionalabus, 4, 2, 8. ratio 4 ad 8, vere coaceruabitur ex rationibus 4 ad 2, & 2 ad 8, tanquam ex partibus: at ratio 4 ad 2 dupla, maior est ratione subduplâ 4 ad 8, rursum igitur pars toto suo maior est. ita Clauius, Salignacus &c.

At Petrus Nonnius, cap. 7. absurda illa absque vllo scrupulo deglutit, admittitque disertis verbis, in rationibus, partem maiorem esse suo toto, atque in illis principium hoc, *totum est maius sua parte*, locum non habere; cuius asserti, tota & vnica est probatio, quod rationes non sint propriè quantitates. vtrumque ineptè: & probationis quidem falsitatem ostendi cap. 1. assertio verò ipsa, aliam responsionem non mererur, præter eam, quam adfert Salignacus lib. 2. c. 1. *potius, inquit, totam mathesim, potius vniuersam naturam destruxeris, quam principium illud, in vllo rerum aut rationum genere, vel tantillum infirmaris; nulla scientia absurdorum est: igitur nec mathematica, totum suâ parte minus, aut partem suo toto maiorem dicet.*

PARS SECVNDA.

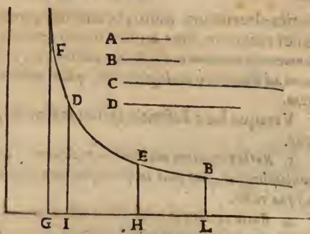
Reiicitur specialiter doctrina Censoris de rationum compositione.

PRæcedentium Auctorum erroribus, alterum de suo adiecit Censor: *patet, inquit, quid sit rationum compositio; quæ nil aliud est, quam rationum vnio, siue fiat additio, siue ablatio; prout sunt eiusdem, vel diuersi ordinis; quemadmodum logarithmi productorum, fiunt per additionem & subtractionem logarithmorum producentium; & in hoc consistit eorum natura; quod enim in progressione geometrica, fit per multiplicationem & diuisionem, hoc in arithmetica correspondente, fit per additionem; vnde neminem mouere debet, quod pro additione rationum, debeat fieri multiplicatio terminorum, hoc enim necessarium est, vt patet ex natura progressionum: cum termini sint in progressione geometrica (in qua vt aliquid oriatur debet fieri multiplicatio) & rationes in arithmetica, quæ additionem exigit.*

Quam doctrinam Theorem. 3. in hyperbola sic conatur demonstrare. *Ratio inter duos terminos, componitur ex omnibus rationibus, inter terminos qui medij sumuntur. sit ratio A ad D; dico eam componi ex rationibus A ad B; plus B ad C, plus C ad D. fiat enim in hyperbola, B L ad E H, vt A ad B: & E H ad F G, vt B ad C: & F G ad D I, vt C ad D; erit spatium*

L B D I,

L B D I, quantitas rationis A ad D: sed hoc spatiũ æquale est spatio L B E H, seu rationi A ad B, plus spatio E H F G, seu ratione B ad C, minus spatio F G D I, seu ratione C ad D: (quæ subtrahitur, quod sit ordinis contrarij) ergo ratio inter duos terminos, componitur seu æqualis est, rationibus inter terminos medios.



Tota hæc Censoris doctrina peccat in pluribus. 1. quod cum rationum compositionem, contendat fieri per additionem; illam explicet, per logarithmos & spatia hyperbolica; quorum vnicum & totum munus est, exhibere qualis sit rationum multiplicatio, siue in serie geometrica, siue inter lineas, spatia hyperbolica includentes, vt ostensum cap. 9.

2. Peccat: quod pro additione rationum, velit fieri multiplicationem terminorum, nimirum antecedentis in antecedens, consequentis in consequens: quod meritò Geometras mouere debet, cum illâ methodo, vera fiat rationum multiplicatio: vt ante ostensum est ex Clauio.

3. Peccat: quod spatia hyperbolica L B D I, L B E H, E H F G, vocet quantitates rationum, A D, B C, C D; id enim plane falsum esse ostendi cap. 9. huius.

4. Peccat dum ait; rationem A D, componi ex rationibus, A B plus B C, plus C D. id enim apertè falsum esse ostensum est ante; vbi demonstratum est, compositionem rationum, fieri per veram multiplicationem, non autem per additionem: *τὸ plus* verò, hîc additionem sonat.

Tota igitur Censoris de rationum compositione doctrina, erronea est.

PARS TERTIA

De rationum multiplicatione.

RAtionum compositionem per veram fieri rationum multiplicationem demonstratum est, vt ante monui, à pluribus: quid verò sit rationem vnam per alteram multiplicare, & quâ fieri id possit methodo, speciatim modo est dicendum.

Euclides lib. 7. defin. 15. quid sit numerum vnum, per alterum multiplicare, sic definit. *numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, ac procreatus fuerit aliquis:*

Ex hac definitione, pulcherrima hæc emanat notio: *numerus ex multiplicatione productus, eandem habet rationem ad alterutrum multiplicantium, quam habet alter multiplicantium, ad vnitatem.* cum enim ex definitione, alterutrum multiplicantium, toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus,

totiès alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium, continet vnitatem. hinc multiplicatio numeri per numerum, aliter definitur: *numerus numerum multiplicare dicitur, cum productus numerus, eam habet rationem ad numerum multiplicatum, quam numerus multiplicans, habet ad vnitatem.*

Vtraque hæc definitio rationum multiplicationi hoc modo applicatur.

1. *Ratio rationem multiplicare dicatur, cum toties composita fuerit ea qua multiplicatur, quot sunt in multiplicante, rationes æqualitatis, & procreata fuerit aliqua ratio.*

2. *Ratio rationem multiplicare dicatur, cum procreata ratio, eam habuerit proportionem ad rationem multiplicatam, quam ratio multiplicans, habet ad rationem æqualitatis.*

Ex his definitionibus sequentes formantur & demonstrantur propositiones.

I.

Sint duæ quæuis rationes A B, C D. & quoties ratio æqualitatis, continetur in ratione C D, toties componatur ratio A B, & producat rationem E F;

Dico rationem E F, productam esse, ex multiplicatione rationis AB, per rationem C D.

A4	C6	E8
B2	D3	F2

Cum enim ratio A B, toties composita, quoties ratio æqualitatis est in ratione C D, producat rationem E F; ratio igitur E F, toties continet rationem multiplicatam A B, quoties ratio multiplicans C D, continet rationem æqualitatis: igitur eadem est proportio rationis productæ E F, ad multiplicatam A B, quæ rationis multiplicantis C D est ad rationem æqualitatis; igitur per defin. 2. ratio E F producta est ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D.

I I.

A4	C6	E24
B3	D2	F6

Sint duæ quæuis rationes A B, C D: & A in C producat E, B in D, producat F.

Dico rationem E ad F, productam esse ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D.

Hæc assertio demonstrata est à Clauio duplici modo, & ab aliis deinceps aliter, quare nouam demonstrationem addere, operæ pretium non est.

I I I.

A	C
B	D
E	

Sint duæ quæuis rationes A B, C D, fiatque vt C ad D, ita B ad E.

Dico rationem A ad E, productam esse ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D.

Ratio A ad E, componitur ex ratione A B, ducta in rationem B E, per Euclidem; sed B E ratio, per constr. est ratio C D, igitur ratio A E, producta est ex ratione A B, ducta in rationem C D.

IV. *Ratio*

IV.

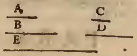
Ratio producta, ex multiplicatione rationis maioris inæqualitatis, per alteram maioris inæqualitatis, est ratio maioris inæqualitatis, & vtrâuis multiplicantium maior.



Sint enim duæ quæuis rationes maioris inæqualitatis, A B, CD: fiatque vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex ductu mutuo rationum A B, C D, vt ante demonstratum est: quia vero est vt C maior ad minorem D, ita B ad E, erit E, minor quàm B, adeoque A E ratio, maioris est inæqualitatis, & maior, tam ratione A B, quam BE, hoc est CD; per 8. v. Euclidis.

V.

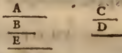
Ratio producta, ex multiplicatione rationis A B minoris inæqualitatis, per C D rationem etiam minoris inæqualitatis, semper est minoris inæqualitatis & vtrâuis multiplicantium minor.



Fiat enim vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex multiplicatione mutua rationum A B, C D: quia vero est vt C ad D, minor ad maiorem, ita B ad E, erit E maior quam B, adeoque ratio A ad E minoris inæqualitatis, & minor tam ratione A B, quam B E, hoc est CD; per 8. v.

VI.

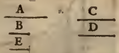
Ratio producta ex multiplicatione rationis A B maioris inæqualitatis, per rationem C D minoris inæqualitatis, minor est quidem ratione maioris inæqualitatis A B, at maior ratione C D minoris inæqualitatis.



Fiat enim vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex ductu mutuo rationum A B, C D. quia vero est vt C ad D, minor ad maiorem, ita B ad E; erit E maior quam B, adeoque ratio A ad E, minor ratione AB, & maior ratione B ad E, hoc est C ad D. per 8. v.

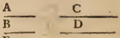
VII.

Ratio producta ex multiplicatione rationis AB, maioris vel minoris inæqualitatis, per rationem æqualitatis C D, eadem est cum ratione A ad B.



Fiat enim vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex mutua multiplicatione rationum A B, C D. quia vero est vt C ad D, ita B ad E; erit E æqualis B, adeoque ratio A E, eadem cum ratione AB.

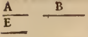
VIII.



Ratio producta ex multiplicatione rationis aequalitatis AB, per alteram rationem aequalitatis CD, est ratio aequalitatis.

Fiat enim vt C ad D, ita B ad E: erit AE ratio, producta ex ductu mutuo rationum AB, CD; quia vero est vt C ad D, ita B ad E, erit E aequalis B, adeoque & ipsi A; & AE ratio aequalitatis.

IX.



Ratio producta ex multiplicatione rationis cuiusuis AB, per rationem B ad A, semper est aequalitatis.

Sumatur enim E, aequalis A: ratio A ad E, per Euclidem componitur, ex multiplicatione rationum AB, BE, hoc est BA: igitur &c.

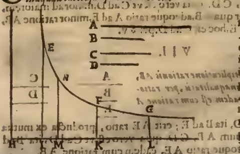
PARS QVARTA.

Vnde dignosci queat, vtra ex duabus rationibus propositis, sit alterius multiplicata, & quoties.

PRopositis duabus rationibus, de quibus inquiritur, vtra alterius sit multiplicata, & quoties; vel vtraque maioris est inaequalitatis, vel minoris, vel illarum vna maioris, altera minoris inaequalitatis; suam singulis praescribemus regulam, & demonstratione geometricâ stabilimus.

PROPOSITIO X.

OMnis ratio maioris inaequalitatis, multiplicata est alterius rationis maioris inaequalitatis, quae priori minor est.

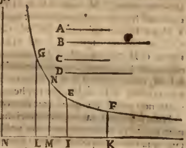


Sint duae rationes maioris inaequalitatis, AB, CD; & AB quidem ratio, sit maior ratione CD: dico illam, huius esse multiplicatam; seu rationem AB, continere per multiplicatione rationem CD. ponatur in hyperbola EFG, serie EI, FK, paralelae alteri asymptotorum &, proportionales ipsis A, B. fiatque vt C ad D, ita FK ad GL, (quae fieri posse patet ex lib. Auctoris de hyperbola.) cum igitur per constr. ratio EI ad FK, sit ratio A ad B, & ratio FK ad GL, sit ratio

ratio C ad D; atque ex hypothesi, ratio A B sit maior ratione C D, erit quoque ratio E I ad F K, maior ratione F K ad G L: quia vero per 78. de hyperb. est vt G L ad F K, ita H K ad H L, & vt F K ad E I, sic H I ad H K, ratio quoque H K ad H I, maior est ratione H L ad H K: fiat igitur vt L H ad H K, sic H K ad M H, ponaturque M N paralela E I, cadet N M inter E I, & F K: (cum enim L H, K H, M H continuè sint proportionales, etiam N M, F K, G L continuè erunt proportionales; & ratio N M ad F K, æqualis rationi F K ad G L, maior autem est ratio E I ad F K, ratione F K ad G L ex hypothesi, igitur & ratio E I ad F K, maior est ratione N M ad F K, adeoque E I maior, quam N M, per 8. v. quare hæc cadit inter E I & F K) & spatium E I F K, maius est spatio N M F K. quia autem rectæ N M, F K, G L, sunt continuè proportionales, spatio N M F K, æquatur spatium F K G L, per 130. de hyperb. igitur spatium E I F K, maius quoque est spatio F K G L: sed quam multiplex est spatium E I F K, spatij F K G L, toties ratio E I ad F K, multiplicat rationem F K ad G L; igitur quam multiplex est spatium EIFK, spatij FKGL, toties A B ratio, per multiplicationem continet rationem C D. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

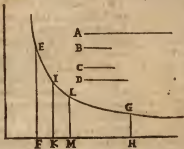
Omnis ratio minoris inæqualitatis, multiplicata est alterius rationis minoris inæqualitatis, quæ priori maior est.



Sint A B, C D, rationes duæ minoris inæqualitatis: & quidē C D ratio, sit maior ratione A B: dico hanc, illius esse multiplicatam. ponantur in hyperbola rectæ E I, G L, paralelæ vni asymptotorum, & proportionales rectis A, B. fiatque vt D ad C, ita E I ad F K: erit ratio F K ad E I, æqualis rationi C ad D, adeoque maior ratione A ad B, hoc est E I ad G L. quia vero est, vt F K ad E I, sic H I ad H K, & vt E I ad G L, sic H L ad H I, erit quoque ratio H I ad H K, maior ratione H L ad H I: fiat igitur vt H K ad H I, sic H I ad H M, ponaturque M N paralela G L, cadet N M, inter G L & E I: (cum enim ratio E I ad N M, sit eadem cum ratione F K ad E I, ratio autem F K ad E I, maior sit ratione E I ad G L, erit ratio E I ad N M, maior ratione E I ad G L, adeoque N M linea, minor quam G L: per 8. v. quare N M, cadit inter G L & E I) & spatium E I G L, maius spatio E I N M: quia vero N M, E I, F K, per constr. continuè sunt proportionales, spatio E I N M, æquatur spatium F K E I; quare spatium E I G L, maius quoque est spatio F K E I, sed per 129. de hyperb. quam multiplex est spatium E I G L, spatij FKEI, toties ratio E I ad G L, multiplicat rationem F K ad E I, igitur etiam quam multiplex est spatium E I G L, spatij FKEI, toties A B ratio, multiplicat rationem C D: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Sint duæ rationes A B, C D; & A B quidem maioris inæqualitatis, C D vero minoris, dico exhiberi non posse, an, aut quoties vna alterius sit multiplicata.



Si enim fieri possit, sit A B ratio, v.g. duplicata rationis C D; & ponantur in hyperbola rectæ EF, GH, proportionales rectis A, B. fiatque, vt C ad D, ita G H ad IK: erit igitur ratio E F ad GH, duplicata rationis G H ad IK: ponatur autem inter EF & GH, media proportionalis L M: erit illa, vel eadem cum I K, vel cadet vltra, aut citra I K. si eadem sit cum I K, proportionales igitur sunt EF, IK, GH, & ratio E F ad GH, duplicata rationis I K ad G H; sed ex hypothesi, ratio EF ad GH duplicata est rationis GH ad IK, ratio igitur I K ad G H, æqualis est rationi G H ad I K, quod impossibile: iam vero, cadat L M, inter I K & G H: quoniam igitur E F, LM, GH, continuè sunt proportionales, erit ratio EF ad GH, duplicata rationis L M ad G H: sed ratio EF ad GH, duplicata ponitur rationis G H ad I K; ratio igitur L M ad G H, æqualis est rationi G H ad IK; igitur G H minima, est ad I K maximam, vt maior L M, est ad eandem minimam G H: quod impossibile: similiter ostendetur sequi impossibile, si L M, cadat inter I K & E F: igitur ratio A B, non potest esse duplicata rationis C D: sed neque triplicata, aut quadruplicata &c. exhiberi igitur non potest &c. quod erat demonstrandum.

Hinc sequitur 1. rationem maioris inæqualitatis, quoad multiplicationem conferri aut comparari non posse, cum ratione minoris inæqualitatis: quantumcunque enim ratio minoris inæqualitatis, in se ipsam multiplicetur, nunquam producet rationem maioris inæqualitatis, sed minoris semper, vt ostensum propos. 5. partis 3. huius; imo quò sæpius ratio minoris inæqualitatis in se ipsam multiplicatur, tantò minor erit ratio producta.

A	C.	B
B	D	F

Sequitur 2. aliud esse, rationem v.g. A B, aliquoties multiplicatam esse rationis C D, puta duplicatam, triplicatam &c. aliud, rationem A B multiplicari per rationem C D: prius enim significat, rationem C D, aliquoties v.g. bis, tèr in se ductam, producere rationem A B; vel rationem A B, aliquoties in se continere per multiplicationem, rationem C D. posterius vero significat, rationem aliquam tertiam oriri, v.g. E F, vel ex multiplicatione denominatorum rationum A B, C D, vel ex multiplicatione terminorũ, puta A in C producat E, B in D producat F.

PARS QVINTA.

Vindicatur à Censura Propos. 75. oper. Geom. de multiplicatione rationum.

A	C
B	D
E	

PRoponit Auctor oper. Geom. lib. 8. propos. 75. Theorema huiusmodi: *data sint rationes A B, C D; fiatque vt C ad D, ita B ad E, dico rationem A B, ductam in rationem C D, producere rationem A E:*

Propositionem hanc ita censet auctor recentior l. 5. Elem. parte 3. pag. 171. *hæc operatio est Gregorij à S. Vincentio, l. 8. prop. 75. sed nec eam ipse, nec alius quisquam demonstrat; hunc igitur in modum demonstrabitur.*

Demonstratio recentioris auctoris: *Ratio A ad E, producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad E, vt patebit ex demonstratione n. 12, ab his independente: sed rationes A ad B, & B ad E, sunt rationes A ad B, & C ad D, per constr. ergo ratio A ad E, est ea, quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. quod erat demonstrandum.*

Demonstratio P. Gregorij: *Rationes A B, B E, componunt rationem A ad E. sed ratio B E, est ratio C D, per constr. ergo ratio A B, cum ratione C D, componunt rationem A ad E. ergo ratio A B, ducta in rationem C D, producit rationem A ad E. quod erat demonstrandum.*

Demonstratio hæc P. Gregorij, ab alia, in nullo differt, quam quod in illa assumatur tanquam principium à totâ Geometriâ hactenus admissum, rationem A ad E, componi ex rationibus A ad B, & B ad E: in hac vero idem assumatur, non tanquam principium, sed vt Theorema postea demonstrandum. idcirco igitur P. Gregorius operationem suam non demonstrat, quod in demonstratione assumat compositionem rationum, vt principium, admissum quidem ab omnibus, sed tamen non demonstratũ. sed non adnertit auctor ille, aliud esse operationẽ aliquã non demonstrare, aliud eandem demonstrare assumpto principio, à totâ Geometriâ admisso, licet id demonstratum non sit. quis vnquã adeo cæcutiuit Geometra, vt neget, Apollonium magnum illum Geometram, Theoremata sua & problemata conica demonstrasse? & tamen hic, rationum compositionem quasi sibi propriam & singularem, ita demonstrationibus suis adhibet, vt vix vnam sit reperire, quæ absque illa perficiatur: igitur P. Gregorius operationem suam idcirco si non demonstret, quia in ea rationum compositionem vt principium assumat, neque Apollonius, cui eadem causa est, propositiones suas demonstrauit: quod nemo dixerit Geometra.

Sed ad hominem, vt aiunt, iam formo argumentum: idcirco P. Gregorius operationem suam non demonstrat, quia in ea assumit, compositionem rationum, vt principium, admissum quidem ab omnibus, sed tamen non demonstratum: igitur neque auctor ille compositionem rationum demonstrat, cum illius demonstratio, dependeat ab alio principio, quod nec ipse, nec alius quisquam demonstrarat, & vniuersaliter sumptum non admittitur ab omnibus. sequelam, ex ipsa illius demonstratione sic probo:

Data sint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D: ostendendum est rationem A ad D, componi ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D. fiat vt B ad C, ita X ad B. eruntque rationes A ad B, B ad C, reducta ad rationes A ad B, & X ad B, habentes commune consequens B; ac proinde rationum denominatores sunt A & X &c.

A X
B
C
D

Assumitur in hac demonstratione, rationum A ad B, & X ad B commune habentium consequens B, denominatores esse A & X. id vero vel assumitur vt principium seu axioma non demonstratum, vel vt Theorema à P. Gregorio demonstratum (nemo enim id ante ipsum demonstrauit) si prius, igitur Auctor ille, compositionem rationum non demõstrat, quia in demonstratione suâ assumit aliquid non demonstratum. si posterius, idem rursus sequitur; nam rationum commune habentium consequens, denominatores esse, antecedentes terminos, demonstratur à P. Gregorio, dependenter ab hoc principio (sine quo demonstrari fortassis non potest) *quantitas rationis seu denominator, ductus in consequentem terminum rationis, producit antecedentem:* quod nec ipse, nec alius quisquam tunc demonstrarat, & vniuersaliter ab omnibus non admittitur; ergo rursus auctor ille compositionem rationum non demonstrat, cum illius demõstratio dependeat, à principio non demonstrato. Aut igitur P. Gregorius suam operationem demonstrat, aut neque Apollonius suas propositiones, neque recentior ille compositionem rationum demonstrauit.

Deinde, quod Auctor idem dicat, compositionem rationum à nullo ante se demonstratam esse, plane à vero alienum est. demonstrauit enim illam in Euclide suo Logistico, Nobilis Dominus Franciscus de Nonancourt, cuius demonstrationem, ab auctore illo, & lectam esse, & apud alios laudatam, certus scio: quod miror ab ipso dissimulari.

CAPVT DECIMVM SEXTVM.

De rationibus proportionalibus.

α β γ δ
A C E G
B D F H

RAtiones eas proportionales voco, *quarum denominatores sunt proportionales.* sint quatuor rationes AB, CD, EF, GH quarum denominatores sint α, β, γ, δ. si quantitates, α, β, γ, δ fuerint continuè proportionales, erunt & rationes AB, CD, EF, GH continuè proportionales: si vero fuerit, vt α ad β, ita γ ad δ, erit AB ratio ad rationem CD, vt ratio EF, ad rationem GH: ratio definitionis clara est: cum enim vt, dictum cap. 5. & 6. huius, denominatores, in re idem sint cum rationibus, eadem proportio est inter rationes, quæ reperitur inter denominatores. hinc omnes proprietates, quæ ab Euclide demonstrantur conuenire quantitatibus proportionalibus, ad amussim conueniunt rationibus proportionalibus: quod paucis ex Auctore demonstro.

Sit AB ratio ad rationem CD, vt ratio EF, est ad rationem GH. dico rationem AB, ductam in rationem GH, æquari rationi CD, ducta in EF.

I K
A C E G
B D F H

Fiat vt G ad H, sic B ad I. & vt E ad F, sic D ad K; erit ratio AB ad rationem HG, vt A ad I; & ratio CD ad rationem FE, vt C ad K, per ea quæ

quæ demonstrata sunt cap.6. huius.rursum quia est vt G ad H, ita B ad I, erit ratio A I, orta ex ratione A B, ducta in rationem G H per 3. pr.ca. 15.huius.similiter,quia est vt E ad F,ita D ad K,ratio C ad K, orta est ex ratione C D, ducta in rationem E F. rursum, quia ex hypothesi ratio A B est ad rationem C D, vt ratio E F ad rationem G H, per 60.lib.de proport.ratio A B, est ad rationem H G, vt ratio C D, est ad rationem F E: sed A B ratio, est ad rationem H G, vt A ad I; & ratio C D, est ad rationem F E, vt C ad K, igitur vt A est ad I,ita C ad K.sed ratio A I,orta est ex ductu rationis A B, in rationem G H, & C K ratio, orta ex ductu rationis C D in rationem E F, ratio igitur A B ducta in rationem G H, æquatur rationi C D ductæ in rationem E F: est Auctoris 86. lib.8.

Similiter demonstratur,si fuerint tres rationes continuè proportionales,quod prima,ducta in tertiam,æquetur mediæ,ductæ in se.

A	C	E	G
B	D	F	H

Sint rursum A B, C D, rationes, proportionales rationibus E F; G H: sitque A B ratio omnium maxima:dico aggregatum ex rationibus A B, G H, maius esse aggregato,ex rationibus C D, E F. patet: cum enim rationes illæ proportionales sint,denominatores quoque illarum proportionales erunt: & quia ratio A B ponitur maxima,& consequenter ratio G H minima,denominator quoque rationis A B, maximus erit, & rationis GH,minimus:quare iuxta 25. v.Eucl. summa denominatorum rationum A B, G H, maior est summâ denominatorum, rationum C D, E F: igitur & summa rationum A B, G H, maior est, summâ rationum C D, E F.

Similiter ostendetur, quod si tres rationes fuerint continuè proportionales, summam ex maxima & minima, maiorem esse duplâ reliquæ.

Propositionem 86, quam paulo ante ex Auctore attuli: ita Censet Censor A.A. *Si P.Gregorius*, inquit,*rectè intelligeret, quid sit ducere rationem in rationem,vera esset eius propositio,cum ex proprietate quatuor quantitatum proportionalium,factum sub extremis logarithmis,æquetur facto sub mediis, &c.sed cum putet in rationum compositione, fieri veram rationum multiplicationem,voluit hanc proprietatem ipsis tribuere, quæ nullatenus eis conuenit. si enim rationes A B plus G H, æquales sint rationibus C D plus E F, tunc solummodo summa priorum, æquabitur summæ posteriorum;non autem eorum productum: ergo tunc rationes non poterunt esse proportionales;cum ex Euclide, summa extremorum proportionalium,maior sit summâ mediarum.*

At si Censor, aut ea quæ scribit ipse,aut rationum naturam rectè intelligeret,distingueret vtique rationum additionem,ab earundem multiplicatione;videretque, dum de quatuor rationibus proportionalibus dicitur,*primam ductam in quartam,idem producere,quod secunda in tertiam*,agi de vera rationum multiplicatione;dum autem de iisdem dicitur,*aggregatum maximæ rationis & minimæ,maius esse aggregato reliquarum*, agi de vera rationum additione,distincta ab earundem multiplicatione:atque vtramque hanc proprietatem,tam rationibus proportionalibus, quã Euclideis quantitatibus conuenire.

Quâ methodo,datis duabus rationibus, tertia aut media inueniatur proportionalis,breuiter ex Auctore,doctrinæ ergo, non pigebit hic adferre.

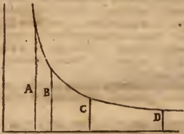
A C
B D
F E

Sint duæ rationes A B, C D; oportet exhibere tertiam proportionalem. fiat vt C ad D, ita D ad E; & vt C ad E, ita A ad F: dico rationem B F, esse illam, quæ quæritur: patet: cum enim rationes A F, CE, similes sint, per 61. lib. de proport. ratio A B est ad rationem C D, vt ratio D E, hoc est C D, ad rationem B F. igitur &c.

A C
B D
E F G
H

Sint rursum A B, C D, rationes quæcunque: oportet mediam proportionalem assignare. fiat vt A ad B, sic E ad F: & vt C ad D, sic F ad G: tum inter E, G, media inueniatur proportionalis H. dico rationem E H, esse illã, quæ quæritur. ratio E F, ducta in rationem F G, producit rationem E G: similiter ratio E H, ducta in rationem H G, producit rationem E G: sed H G ratio, ex constr. est eadem cum ratione E H, igitur E H in se ipsam ducta, producit rationem E G, quæ oritur ex ductu rationis E F in F G, hoc est ex constr. A B in C D. igitur E H ratio, media proportionalis est, inter rationes A B, C D.

Porro notatu dignum est, quam diuersas affectiones in hyperbola causent, tam simplices quantitates, quam rationes continuè proportionales.



1. Sint in hyperbola alteri asymptotorum parallelæ, rectæ A B C D, continuè proportionales. dico superficies hyperbolicas A B, B C, C D, esse omnes æquales. est conuersa, propos. 130. lib. de hyperbola.

2. Si rationes A ad D, B ad D, C ad D, fuerint continuè proportionales, dico superficies hyperbolicas, A D, BD, CD, esse arithmeticè proportionales: cum enim rationes illæ sint continuè proportionales, & commune habeant consequens D, erunt antecedentes illarum termini, A, B, C, in continua analogia: adeoque superficies A B, (excessus nimirum quo superficies A D excedit B D,) æqualis superficiei B C, (excessui quo B D superat C D) igitur superficies illæ arithmeticè sunt proportionales.

3. Si ratio A D, toties multiplicata sit rationis B D, quoties ratio BD, est multiplicata rationis C D; dico superficies hyperbolicas A D, B D, C D continuè esse proportionales geometricè. patet: nam superficies A D, tam multiplex est superficiei B D, quam ratio A D, multiplicata est rationis B D; & superficies B D, tam multiplex superficiei C D, quã ratio B D, multiplicata est rationis C D: sed ex hypothesi, quam multiplicata est ratio A D rationis B D, tam multiplicata est ratio B D rationis C D, igitur quam multiplex est superficies A D, superficiei BD, tam hæc ipsa superficies B D, multiplex est superficiei C D; igitur tres illæ superficies continuè sunt proportionales geometricè.

Hinc demonstratiuè patet, quoties tres sunt rationes, quibus hæc proprietas competit, vt quoties prima multiplicata est secundæ, toties secunda sit multiplicata tertiæ; nunquam illas rationes esse continuè proportionales: nam rationes illæ translatæ ad hyperbolam, intercipiunt superficies

perficies continuè proportionales geometricè: rationes vero continuè proportionales, dant in hyperbola superficies arithmeticè tantum proportionales.

A	C	D
F	H	I

Ostenderat idem, binis demonstrationibus P. Alphonsus de Saraſſa, in confirmationibus quadraturæ coroll. 11. cum einſmodi mox à nonnullo tulit Cenſuram. *negas P. Saraſſa, si ratio A F, sit duplicata rationis C H, & hæc duplicata rationis D I, eas esse continuè proportionales: in quo quidem & cum aſseris, & cum demonſtras, vehementer falleris; ſunt enim proportionales in ſenſu multiplicationis: quod ſic oſtendo. ex hypotheſi, ratio A F continet rationem C H bis, & hæc continet bis rationem D I, in ſenſu nempe multiplicationis, ergo in eodem ſenſu, ita ſe habet ratio A F ad rationem C H, vt hæc ſe habet ad rationem D I. igitur in ſenſu dicto rationes illæ proportionales ſunt: &c. geminâ itaque demonſtratione ſuâ, nil aliud effecit P. Saraſſa, quam rationes illas non eſſe proportionales in ſenſu additionis.*

Tota hæc reſponſio adeo friuola eſt, vt refelli vix mereatur: id enim quod ſupponitur, adfert pro quæſito, aſſertionem pro demonſtratione; præterquam quod ageometricæ ſint locutiones hæ: *proportionales in ſenſu multiplicationis, proportionales in ſenſu additionis*, quas Geometria hactenus non audiuit. ſupponitur à P. Saraſſa, rationem A F, tam eſſe multiplicatam rationis C H, quam hæc eſt multiplicata rationis D I; ſiue ſi ita loqui fas ſit, rationem A F in ſenſu multiplicationis, ita ſe habere ad rationem C H, ſicuti hæc ſe habet ad rationem D I, in ſenſu vtique multiplicationis: atque hoc ſuppoſito, quærebatur, an inde ſequeretur, rationes illas eſſe continuè proportionales: quærebatur autem non de nomine, an nimirum ob iſtam æquimultiplicationem rationum, nomen proportionalium poſſet aliquo ſenſu illis attribui, ſed de re quærebatur, an nimirum rationes illæ verè eſſent continuè proportionales; hoc eſt, an illarũ quantitates continuã ſeruarent analogiam. negabat id P. Saraſſa, & duplici demonſtrabat viâ. mox alter, *P. Saraſſa*, inquit, *& cum id aſſeris, & cum demonſtras vehementer falleris.* quâ de causâ? *ſunt enim continuè proportionales in ſenſu multiplicationis, nam ratio A F in ſenſu multiplicationis, ſic ſe habet ad rationem C H, ſicut hæc ad rationem D I, in ſenſu vtique multiplicationis.* at hoc non quæritur, ſuppoſitum eſt: quæſitum à ſuppoſito differt; illa ſic ſe habentia ſecundum multiplicationem, hypotheſis eſt: quæritur autem, an ex ea ſequatur, rationum illarum quantitates in continua eſſe analogia? rurſum idem reponitur, *ſunt proportionales in ſenſu multiplicationis* &c. quid facias reſponſioni tam ad rem non pertinenti? videte modo concluſionem ex eiuſmodi præmiſſis deductam: *geminâ itaque demonſtratione ſuâ, nil aliud effecit P. Saraſſa, quam rationes A F, C H, D I, non eſſe proportionales in ſenſu additionis*, hoc eſt vt Geometræ loquuntur, ſecundum quantitates ſuas. atque de hoc ſolo tota erat quæſtio, aliud enim vtrimque ſupponebatur, rectè igitur P. Saraſſa & aſſeruit & demonſtrauit id, quod erat in quæſtione: qui igitur in eo quod rectè ab illo factum dicitur, vehementer falli aſſeritur?

CAPVT DECIMVMSEPTIMVM.

Spongia Centuriæ Censurarum, quas in Auctoris librum 8. de proportional. conscripsit vir Clariss. A.A.

EX falsa opinione nascentia, vbi desinant non habent; nullus enim terminus falso est: via eunti, aliquid extremum est; error est immensus. quod quam verum sit, palam faciunt Censoris illæ de rationibus nouitates, & ex illis orta Censurarum centuriatis enim, vbi à trita & primorum Geometrarum firmata vestigiis semita, primum deflexit, in immensum errores circumduxit. Rationum naturam à multiplicatione omnino dependere, atque in illa sitam esse, cæterorum errorum omnium fons est & origo. Hinc in denominatorum locum, logarithmos & spatia intrudit hyperbolica; rationem æqualitatis, ad punctum & nihilum redigit; rationum multiplicationem, cum additione confundit; librum pæne integrum Auctoris de proport. falsitatis accusat: Euclidem ipsum erroris arguit; omnem denique quæ de rationibus est geometriam, euertit. idque eâ præfidentiâ, vt cum ne vnum quidem ex prædictis omnibus, probabili vel in speciem ratione, nædum geometricâ demonstratione adstruat, figmenta illa sua, certam veluti regulam & amussim proponat, ad quam omnis de rationibus doctrina dirigi & explorari debeat. quæ res quam insolens & noua, tam ab omni veritate aliena est: quod in præcedentibus euidenter demonstratum cum sit, ea modo excutienda restant, quæ ex principiis huiusmodi deducta, centuriam statuunt Censurarum.

Atque vniuersim quidem ex 172 propositionibus, quibus lib. 8. Auctoris constat, vix 70. veras esse pronunciat: reliquas omnes, aut apertæ falsitatis, aut malæ constructionis, aut alterius erroris accusat: porro quã vanæ & nullæ eæ sint censuræ, ex ipsis quibus deducuntur principiis omnino patet; quæ falsitatis manifestæ conuicta cum sint, falsas quoque censuras eas esse, necesse est: quod ipsum lubet singillatim ostendere.

Primùm; ex eo quod logarithmos & spatia hyperbolica, velit esse rationum quantitates, locumque denominatorum obtinere, falsam asserit propos. 2. l. 8. & ex hac, propositiones sequentes. 3.4.5.6.13.37.43.54.55.56.99.101.103.113.126.161.162.163. at cum cap. 9. dilucidè ostenderim, neque logarithmos, neque spatia hyperbolica, esse aut esse posse rationum quantitates, sequitur censuras illas nullas esse.

Secundùm: ex eo quod ratio æqualitatis, iuxta illum sit vel punctum, vel nihil, adeoque alteri rationi addita, neque faciat quid maius, neque hanc immutet, sequentes propositiones falsitatis arguit 7.9.10.11.13.14.15.16.19.21.26.33.34.38.39.50.51.53.58.59.60.61.62.63.67. 71.84. 121.138.145.164.165. verum cum principium hoc falsissimum sit, vt ostēdi cap. 10. palam est censuras eas omnes quoque falsas esse.

Tertiùm, ex eo quod ratio minoris inæqualitatis, secundum illum, quoad quantitatem conferri non possit cum ratione maioris inæqualitatis, aut contra, erroris condemnat propos. sequentes 18,32.23.41.92.94.131. atque hoc principium, erroneum cum sit, vt ostendi cap. 12. & alibi vanas quoque & erroneas esse censuras inde ductas, necesse est.

Quartùm;

Quartùm; ex eo quod rationum compositio, iuxta ipsum nil aliud sit, quam rationum vnio, quæ multiplicationem excludat, falsitatis arguit propositiones. 75.76.77.80.82.92.93.120. sed & illud principium falsum esse cum ostenderim cap. 15. falsæ quoque eæ sunt censuræ.

Quintùm: ex eo quod rationes velit sequi naturam & proportiones spatiorum hyperbolicorũ, partim ignotas, partim insolubiles asserit propositiones sequentes: 24.25.27.28.29.30.31.68.69.70.102. 117.122.123.141. 142.143.144.152. denique & hoc principium falsum cum sit, vt sæpius ostendi, veritatem suam & legitimam quam Auctor dedit solutionem obtinent.

Ex iisdem principiis, quibus vsus Censor A A, Euthymius Grammaticus damnauit propositiones sequentes: 2. lib. 8.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13. 14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25. & sic consequẽter vsque ad 81. inclusiue: quibus alias addit vsque ad 117. sed cum censura illa tota falsis ipsius principiis innitatur, vt ante ostensum, nulla est; de propositionibus quas in lib. 10. Auctoris damnat, suo loco videbimus.

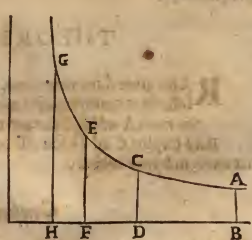
Cæterum animos candoremque Censoris laudo; & quod tantum laboris ac molestiæ rebus geometricis Auctoris examinandis impenderit, gratias ago; quod vero id egerit infelicius, vehementer doleo. porro ne tantis ingratus sim officiis, Censurarum Centuriæ, quindenam repono; tot nimirum, quot Theorematis suum de rationibus tractatum complexus est: atqui non nudis & gratuitis constabunt illæ assertionibus, sed appositis singulas firmabo demonstrationibus, aut locum indicabo, vnde peti illæ possint.

CAPVT DECIMVMOCTAVVM.

Censura quindecim Theorematum, quibus vir Clariss. A A, quæcunque tum Euclides in v. Elemento de rationibus simplicibus, tum alij de simplicibus & compositis, nouâ methodo se putat demonstrare

THEOREMA I.

SI in hyperbola ducantur plures rectæ vni asymptotorum paralelæ, spatia hyperbolica, quæ includuntur à rectis, repræsentant rationes inter illas rectas. v. g. spatium A B C D, quantitas est rationis A B ad C D, & spatium C D E F, quantitas rationis C D ad E F &c.



Censura.

FAlsa est propositio: demonstrat enim Auctor oper. Geom. spatium A C D B, tam multiplex esse spatij C E F D, quam multiplicata est ratio A B ad C D, rationis C D ad E F &c. l. 6. prop. 129. ostensum insuper est c. 10. huius,

huius, spatia hyperbolica, nec esse, neque esse posse quantitates rationum inter lineas spatia includentes: igitur neque spatia repræsentant rationes illas, neque repræsentare possunt secundum quantitatem.

Hinc quoque falsum est problema quod Theoremati primo subiungitur: cum illius solutio, ab hoc dependeat: falsum item coroll. 2 & 3, eidem innixum.

THEOREMA II.

Ratio æqualitatis nullam habet quantitatem à qua repræsentetur. sit ratio æqualitatis A ad A; si per problema præcedens, eius quantitatem quæramus, inueniemus nullam esse; cum inter duas lineas æquales, seu potius vnicam, nullum spatium hyperbolicum intercipiatur; ergo rationis æqualitatis non datur quantitas.

Aliter: sit aliqua quantitas, quæ rationem æqualitatis repræsentet, v. g. Z. cum quâlibet datâ ratione maioris inæqualitatis, possit dari minor & minor in infinitum, tandem deuenietur ad quantitatem, datâ Z minorẽ; ac proinde ratio æqualitatis, erit maior ratione maioris inæqualitatis, quod absurdum.

Aliter: sit rursus Z quantitas rationis æqualitatis; ergo duæ rationes æqualitatis A ad A, plus A ad A; erunt duplæ simplicis rationis A ad A, quod æque falsum; cum quotcunque rationes æqualitatis compositæ, sint tantum æquales vnicæ rationi.

Censura.

Falsa est propositio, & demonstrationes omnes tres erroneæ. demonstratum est enim, cap. 10. huius, rationem æqualitatis, veram esse quantitatem, & habere denominatorem à qua repræsentetur.

Demonstrationis primæ error, patet ex cap. 9. huius, in quo demonstratum est, spatia hyperbolica, non esse quantitates rationum, adeoque nec illas secundum se repræsentare posse.

Demonstrationem secundam falsitatis conuici cap. 10. part. 2. sub finem.

Tertiam item demonstrationem falsam ostendi cap. 10. part. 1. num. 2.

Falsum quoque est coroll. 1 & 2. cum ex Theor. deducantur, vt sigillatim ostẽdi cap. 10. huius p. 1.

THEOREMA III.

A
B
C
D

Ratio inter duos terminos, componitur ex omnibus rationibus inter terminos, qui medij sumuntur.

Sit ratio A ad D. dico eam componi, ex rationibus A ad B plus B ad C, plus C ad D, seu esse æqualem omnibus rationibus.

Fiat enim in hyperbola &c.

Censura.

Vera est assertio in abstracto proposita; nimirum rationem A ad D, componi ex omnibus rationibus inter terminos qui medij sumuntur: falsum autem est, rationem A ad D, componi ex ratione A ad B, plus B ad C, plus C ad D. nam τὸ plus

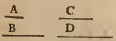
additionem hic sonat, compositio autem rationum, fit per veram multiplicationem rationum mediarum, & non per earundem additionem; vt demonstraui cap. 15. vnde & falsum est, rationem A ad D, esse aqualem omnibus rationibus A ad B plus B ad C, plus C ad D: aliud enim est, rationem A ad D componi ex rationibus intermediis, aliud rationem A ad D illis simulsumptis esse aqualem.

Demonstratio quoque Theorematis plane erronea est & falsa, cum aſsumat rationes linearum spatia hyperbolica includentium, eſse inter se, vt spatia; siue illas per hac repraesentari, quo nihil minus verum est.

Coroll. 1. falsum est, & nihil prater aſsertionem Theor. continet: falsum quoque est Coroll. 2. cum eundem errorem Theor. contineat.

THEOREMA IV.

SI quatuor magnitudines sint proportionales, inuersæ erunt proportionales.



Sit A ad B, vt C ad D, dico inuertendo esse D ad C vt B ad A.

Cum enim eadem sit quantitas rationis, inter A ad B, & B ad A, & pariter inter C ad D, & D ad C, erunt igitur rationes D ad C, & B ad A æquales.

Censura.

VEra est aſsertio, vtpote ex Euclide desumpta, at demonstratio prorsus est erronea: cui enim vnquam in mentem venit dicere, eandem eſse quantitatem inter A & B, qua est inter B & A; hoc enim nil aliud significat, quam rationem A ad B eandem eſse cum ratione B ad A, prout expreſsè idem docet 2. coroll. Theor. primi, absurditatem huiusce aſsumpti, vid. cap. 10. huius, parte 2. ad tertium argumentum.

THEOREMA V.

SI quatuor magnitudines sint proportionales, viciſsim erunt proportionales. sit A ad B, vt C ad D; dico permutando esse A ad C, vt B ad D.



Ratio enim A ad C, æqualis est rationibus A ad B, plus B ad C; ratio quoque B ad D, æqualis est rationibus B ad C, plus C ad D; sed ex hypothesi, æquales sunt A ad B & C ad D, quibus eadem additur vel subtrahitur ratio B ad C, ergo tota, vel residua sunt æqualia; seu rationes A ad C, B ad D.

Aliter. iungatur vtrique eadem ratio B ad C, vnde æqualitas non immutatur; erit hinc A ad B plus B ad C (hoc est A ad C) inde vero B ad C plus C ad D (hoc est ratio B ad D) ergo æquales sunt rationes A ad C, & B ad D.

Censura.

ASsertio vera est, at demonstratio erronea. falsum enim est, quod ratio A ad C, sit aqualis rationi A ad B plus B ad C; verum autem est quod ex illarum rationum multiplicatione componatur, vt demonstratum est cap. 15. huius.

Falsa quoque est demonstratio secunda; nam ratio B C, addita rationi A B, vel C D, hanc immutat: vt demonstraui cap.10.part.1.

THEOREMA VI.

A B
C D

Ratio composita ex rationibus reciprocis, facit rationem æqualitatis.

Sint rationes æquales A ad B, & C ad D; & fiat ratio composita ex A ad B plus D ad C; dico eam esse æqualem rationi æqualitatis.

Cum enim sit inuertendo D ad C, vt B ad A, erit A ad B plus D ad C, vt A ad B plus B ad A; id est vt A ad A.

Censura.

Assertio (si per compositionem intelligatur vera rationum multiplicatio) vera est, & desumpta ex lib. 8. Auctoris oper. Geom. propos. 76. quæ ita proponitur: data sit quæuis ratio A ad B: dico rationem A B, ductam in rationem B A, producere rationem æqualitatis.

Si vero per compositionem intelligatur rationum additio, vt fit in casu Theorematis, plane falsa est: nam ratio A B, addita rationi B A, producit rationem inæqualitatis: vt demonstratum est cap. 10. p. 1.

THEOREMA VII.

In ratione cōposita ex duabus rationibus, ratio primi termini ad quartum, plus ratione tertij ad secundum, æqualis est rationi primi termini ad secundum, plus ratione tertij ad quartum.

A B
C D

Sint rationes A ad B plus C ad D, dico iis æquales esse rationes A ad D plus C ad B. nam ratio A ad D, æqualis est rationibus A ad B plus B ad D; & ratio C ad B, æqualis est rationibus C ad D plus D ad B; ergo rationes A ad D plus C ad B, æquales sunt rationibus A ad B plus B ad D, plus C ad D, plus D ad B: sed rationes B ad D plus D ad B, faciunt rationem æqualitatis, quæ nihil immutat, ergo remanent æquales rationes A ad D plus C ad B, rationibus A ad B plus C ad D.

Censura.

E 16. H 28
12 A C 8
4 B D 2

Propositio hæc intellecta, prout illius Auctor intelligit, de compositione rationum, quæ fit per illarum additionem, falsa est vti & demonstratio: nam ratio A B, addita rationi C D, non producit eandem summam, quam ratio A D, addita rationi C B; vt cuiuis vel leuiter in rationum materia versato, primâ fronte apparet. fiat enim vt D ad C, ita B ad E, & aggregatum ex A & E sit H; erit ratio H ad B, summa rationum A B, C D, sibi inuicem additarum: vid. cap. 14. huius part. 2.

12 A C 8
2 D B 4
K 1
L 13

Sint iam addendæ rationes A D, C B: fiat vt B ad C, ita D ad K, & aggregatum ex A & K sit L; erit ratio L ad D, summa ex additione rationis A D, ad rationem C ad B: quæ planè à priori diuersa est: propositio igitur in sensu additionis intellecta falsa est.

est. Intellecta vero in sensu multiplicationis (qualem non admittit ipse) vera est; nam ratio A B ducta in rationem C D, producit idem quod ratio A D ducta in rationem C B.

Demonstratio insuper Theorematis, tot scatet vitiis, quot pane verbis, cum singula pane assumpta falsa sint, vt cuiuis examinanti ad oculum patet.

THEOREMA VIII.

A B — C D — E F

SI sint rationes A ad B plus C ad D, æquales rationi E ad F; erit quoque ratio A ad B, æqualis rationibus E ad F plus D ad C.

Auferatur enim vtrimque ratio C ad D; remanebit hinc ratio A ad B; vtautem ex alia parte auferatur, inuertenda est, hoc enim supra docuimus, vnde proueniet ratio E ad F plus D ad C.

Aliter. addatur vtrimque ratio D ad C; erunt hinc rationes A ad B plus C ad D, plus D ad C; inde vero rationes E ad F plus D ad C. sed rationes C ad D plus D ad C, faciunt rationem æqualitatis, vnde remanet ratio A ad B, æqualis rationibus E ad F plus D ad C.

Censura.

PRopositio est falsissima intellecta in sensu additionis prout Censor illam intelligit: cum enim ratio E ad F, sit summa ex additione rationis A B ad rationem C D, patet illam maiorem esse tam ratione A B, quam C D: igitur summa ex ratione E F, addita rationi D C, multo maior est ratione A B.

In 2. etiam demonstratione, falsum est assumptum, rationes C D plus D C, facere rationem æqualitatis; adeoque additas rationi A B, hanc non immutare, primam demonstrationem fateor me non percipere.

THEOREMA IX.

A B — C D — E F G

SI vna ratio æqualis sit duabus, notæ autem sint duæ quæcunque, nota erit tertia.

Sit ratio A ad B, æqualis rationibus C ad D plus E ad F: & datæ sint rationes A ad B, & E ad F; dico rationem C D, datam esse.

Fiat enim vt A ad B, sic E ad G; erit ratio C ad D, æqualis rationi F ad G, quæ data est, cum ipsius dentur termini. cum enim rationes E ad F plus F ad G, sint æquales rationi E ad G, hoc est A ad B, cui æquales quoque sunt rationes E ad F plus C ad D; erunt rationes C ad D, & F ad G, inter se æquales.

Censura.

PRopositio vera est, sed demonstratio vitiosa. falsum est enim, quod ratio E G, sit æqualis rationi E F plus F G; hoc est prout ipse intelligit, rationi E F, addita rationi F G; est autem ratio E G composita ex ratione E F ducta in rationem F G. vt demonstratum cap. 15. huius. quæ duo specie differunt.

THEOREMA X.

A	C	E
B	D	F

SInt duæ magnitudines quæuis, A & B, quarum sumantur æquemultiplicia C & D, vel æqueportiones E & F: dico esse A ad B, vt C ad D; & A ad B, vt E ad F.

Censura.

PRopositio vera est, & eadem cum 15 Euclidis 5. sed nullius est momenti, vti & quatuor corollaria sequentia, vel ipsis pueris nota.

THEOREMA XI.

SI sint quotcunque ordines quatuor magnitudinum proportionalium, in eadem vel diuersis rationibus; & sit prima vnius ordinis, ad primam alterius, vt tertia ad tertiam; erunt omnes primæ simul, ad omnes secundas, vt omnes tertiæ, ad omnes quartas simul sumptas.

A ad	B		C ad	D
E	F	vt	G	H
I	K		L	M

Sit enim A ad B. vt C ad D; E ad F vt G ad H; I ad K vt L ad M; sit quoque A ad E, vt C ad G; & A ad I vt C ad L.

Dico omnes A, E, I, esse ad omnes B, F, K, sicut omnes C, G, L, sunt ad omnes D, H, M.

Censura.

A	B
E	F
I	K
C	D
G	H
L	M

PRopositio vera est, vtpote Archimedea: 2. de conoid. sed obscurè, & non rectè proposita: quam ita ex Archimede corrige: esto quædam magnitudines A, E, I, item alia totidem C, G, L; & A ad E, eandem habent rationem, quam B ad F. ipsa vero E sit ad I, sicut F ad ipsam K. referãtur autem A, E, I, magnitudines, ad alias magnitudines C, G, L, in quibuscunque proportionibus; ipsa vero B, F, K, ad alias, videlicet D, H, M, eisdem ordine eodem proportionibus; vt sicut A se habet ad C, ita B ad D: & sicut E se habet ad G, ita F ad H; & sicut I se habet ad L, ita K ad M. dico omnes A, E, I, esse ad omnes B, F, K, sicut omnes C, G, L, ad D, H, M, vide Eutochiũ in illam propos.

THEOREMA XII.

SI quatuor magnitudines sint proportionales, earum differentiæ proportionales quoque erunt.

A	B
C	D

Sit A ad B, vt C ad D; ponatur autem A maior B, ac proinde C maior D. dico A minus B, esse ad C minus D, vt A ad C.

Censura.

PRopositio est Euclidis 19. l. 5. adeoque vera: corollarium quartum de octo argumentandi modis, partim ex Clauio desumptum est, partim sequelas ex Euclideis deductas, adeoque nil noui continet: idem est de corollariis aliis, maximè 7.

THEO-

THEOREMA XIII.

SIt quævis ratio A ad B: si vtrique termino addatur eadem quantitas, v.g. E, erit minor ratio A plus E, ad B plus E, quam A ad B: si ab vtroque dematur, erit maior ratio A minus E, ad B minus E, quam A ad B.

A	E
B	E

Censura.

VTraque assertio falsa est in rationibus minoris inæqualitatis: sit enim ratio A ad B, 2 ad 4. quibus addantur æqualia C, D. 2 & 2. ratio A plus C, ad B plus D, est ratio 4 ad 6: ratio vero A ad B, est ratio 2 ad 4; ratio autem subsesquialtera 4 ad 6, maior est ratione subduplâ 2 ad 4: si fiat enim vt 4 ad 6, ita 2 ad 3, erit ratio 2 ad 3, per 8. v. Euclid. maior ratione 2 ad 4: igitur & ratio 4 ad 6, maior est ratione 2 ad 4. falsa igitur est prima assertio.

A 2	C 2
B 4	D 2

Rursum ratio A B, sit 4 ad 8; à quibus æqualia auferantur C, D, 1 & 1; erit ratio A minus C, ad B minus D, ratio 3 ad 7: ratio vero A ad B 4 ad 8: fiat igitur vt 4 ad 8, ita 3 ad 6, erit ratio 3 ad 6, nimirum A ad B maior ratione 3 ad 7, hoc est ratione A minus C, ad B minus D. vtraque igitur assertio falsa est in rationibus minoris inæqualitatis.

A 4	C 1	E 3
B 8	D 1	F 7

THEOREMA XIV.

RAtiones commensurabiles, seu multiplicatæ per numeros, sunt inter se vt numeri à quibus denominantur.

Sint rationes centuplicata & duplicata, eiusdem rationis; dico esse inter se vt 100 ad 2.

Ratio enim centuplicata, est æqualis centum rationibus simplicibus, ratio vero duplicata, duabus; ergo sunt inter se vt centum rationes, ad duas seu 100 ad 2.

Censura.

PRopositio falsa est, & demonstratio prorsus erronea: sit enim 1. ratio A B maioris inæqualitatis; & in eadem continuata serie proportionalium, esto C, centesima prima: patet rationem A C, centuplicatam esse rationis A B. rursus in eadem serie, esto D tertia proportionalis; erit A D ratio, duplicata rationis A B: & D maior quam C, vnde & ratio A C quidem maior ratione A D, sed ratio A C non erit ad rationem A D, vt 100 ad 2: sed vt D, ad C. esto 2. ratio A B minoris inæqualitatis; & in illa serie continuata, tertia proportionalis sit D; centesima prima vero sit C: patet C maiorem esse quam sit D; adeoque rationem A C minorem, quam sit ratio A D: falsa igitur est propositio: demonstratio porro est erronea, quia assumis rationem A C, æqualem esse centum rationibus simplicibus; A D vero duabus: quod falsum esse, alias sæpius ostendi: vtraque enim composita est ex ratione A B aliquoties in se ducta.

AB —— C
AB D

THEO-

THEOREMA XV.

SI sint duæ progressiones geometricæ, quæ terminum antecedentem vel consequentem habeant communem, erit ratio secundorum terminorum à communi, dupla seu duplicata rationis primorum; & ratio tertiorum, erit rationis eorundem primorum, tripla seu triplicata; & sic deinceps.

Censura.

PRopositio hæc desumpta est ex Auctore oper. Geom. lib. 2. prop. 27. adeoque vera est: at male confunditur ratio dupla cum duplicata, tripla cum triplicata: quæ duæ, specie differunt, sicut additio in numeris à multiplicatione, vti ostendi cap. 3. huius.

Monitum.

HÆc illa quindecim sunt Theoremata, quibus vir Clariss. A A, non tantum ea, quæ Euclides in v. elemento de rationibus simplicibus, & alij de simplicibus & compositis proposuerunt, nouâ methodo demonstrare, sed totam rationum naturam ex verissimis eductam principiis cōplecti se opinatus est; idque eâ breuitate & claritate, vt hunc suum tractatum, Geometriæ tyronibus, velùti nonum de rationibus elementum, proponi posse existimarit. at quam hâc spe suâ & opinione falsus sit, iudicent periti omnes, qui vel obiter figmenta hæc noua legerint: admonendus certè est illorum Auctor, vt melius alias res geometricas examinet, firmatisque primorum geometrarum vestigiis insistens, & fallere & falli desinat.

CAPVT DECIMVMNONVM.

Digressio ad Alexium Syluium.

LIbrum operis Geometrici octauum, quem de proportionalitatibus inscripsit Auctor, quam infeliciter impugnarit Censor A A, abundè in præcedentibus, demonstratum est. Altera modo excutienda est Censura, quam de eodem libro, tulit Alexius Syluius Polonus; is sub initium examinis, quod Ephemeridibus suis annexuit, ita librum de proportionalitatibus censet.

Gratis autem hæc (nimirum proportionalitas) *conficta est: cum sub vniuersali nomine rationis ex rationibus composità, contineatur: quæ si alteri rationi ex rationibus composita similis fuerit, fiet proportio rationum compositarum; licet vna ex pluribus rationibus componatur, quàm altera. quomodo vero ex rationibus dissimilibus argumentatio procedere possit, prout in definitione proportionalitatum Auctor se facturum promisit, (ratus propositiones aliquas fore, quæ paralogismos*

mos circa circuli quadraturam continerent) totum librum euolui; nihil tamen simile in eo reperi: donec tandem aduerterem, propos. 60, eandem esse quam iam à sex annis inueni &c. quam rationem permutatam vocaui hoc ni fallor est ex rationibus dissimilibus argumentari: &c. ex his apparet antiquis haud ignotam fuisse formam argumentandi à rationibus dissimilibus; non proximis (quod fieri nequit, nec Auctor id vspiam demonstrauit) sed remotis; quales sunt, inter octo latera quatuor rectangulorum proportionalium; proxima vero similes inter ipsamet quatuor rectangula &c.

Censura hæc, tria asserit: primum quidem, gratis confictam esse proportionalitatem, idque ideo, quia sub vniuersali nomine rationis ex rationibus compositæ contineatur: Alterum, Auctorem operis promisisse edocturum se quomodo argumentatio ex dissimilibus rationibus possit procedere, nihil tamen simile ab eo factum esse. Tertium, antiquis haud ignotum fuisse argumentandi modum à rationibus dissimilibus, non proximis quidem, quia id fieri nequeat, neque Auctor id vspiam præstiterit, sed remotis. videamus modo cuiusmodi asserta illa sint.

Asserit igitur 1. gratis confictam esse proportionalitatem, quia hæc sub vniuersali nomine rationis compositæ continetur. assertio hæc ex grauissimo Alexij errore nata est: existimauit enim ille, quod rationes dissimiles, aliter inter se conferri non possint, quam fiat in rationum compositione, atque inde illam gratis confictam esse ait, & sub vniuersali nomine rationis compositæ contineri, adeoque antiquis haud ignotam fuisse. verum ego vehementer miror, assertum illud Alexio in mentem potuisse venire; rerumque tam diuersarum, quales sunt proportionalitas, & ratio ex rationibus composita, non vidisse differentiam, quæ ex ipsis terminis tam obuia sit & euidens. ratio enim ex rationibus composita, nil aliud est, quam ratio producta, ex multiplicatione aliquot rationum in inuicem: proportionalitas autem, est habitudo duarum proportionum secũdum quantitatem comparatarum: quæ habitudo (vti de rationibus constat ex cap.3. huius) plane independens est à multiplicatione, aut compositione; imo existeret, etiamsi omnis compositio & multiplicatio esset impossibilis: quid igitur, non dico cõmune, sed vel in speciem simile habet ratio composita, cum proportionalitate, vt hæc sub illius nomine dicatur contineri?

Videte modo argumentum, quo assertum suum probat. *Si ratio, inquit, ex rationibus composita, similis fuerit alteri rationi ex rationibus composita, exsurget proportio rationum compositarum; ergo proportionalitas continetur sub vniuersali nomine rationis composita.* quæ quæso isthæc est illatio, quæ sequela? age duas assume rationes, de quibus nil aliud constet, quam quod rationes ex quibus componuntur, sint dissimiles; petò, an, & qualis inter ipsas rationes compositas sit proportio? rursum duas pro libitu statue rationes inter se dissimiles; peto, per compositionem exhiberi illarum proportionem? iterum duabus illis rationibus dissimilibus, duas appone alias, tam interse, quam prioribus dissimiles; peto vtriusque proportionis exhiberi rationem, idque per compositionem. hæc vbi tentaueris, ilicò videbis, quousque rationum compositio se extendat, & vtrum dissimiles, rationes non aliter interse conferri possint, quam per compositionem antiquis notam. non igitur gratis conficta est proportionalitas, neque vllo modo sub vniuersali rationis compositæ nomine continetur; sed toto cælo ab illa differt, nec quidquam habet commune aut simile.

Afferit 2. promififfe Auctorem operis, edocturum fe, quomodo argumentatio ex diffimilibus rationibus procedere poffit; nihil tamen fimile ab eo præftitum.

Affertio hæc grauiffimum rurfus continet errorem; & Alexium in rationum argumento peregrinum oftendit. dico igitur, Auctorem quod promifit, abundè preftitiffe, ac docuiffe quomodo argumentatio à diffimilibus rationibus, iifque proximis & immediatis, procedere debeat: quod fic oftendo.

Certum eft, præcipuum argumentationis à rationibus diffimilibus fundamentum effe, datarum quarumcunque rationum diffimilium, exhibere denominatores, & proportionem notam reddere: atqui Auctor pluribus id demonftrat modis, propofitione 2, 7, 13. 14. 84 ergo &c.

Certum eft fecundò, ad argumentandum ex rationibus diffimilibus, maximè neceffarium effe, quarumuis rationum diffimilium proportiones interfe comparare, earumque rationes notas facere; atque id Auctor toto paffim libro octauo demonftrat: ergo &c.

Certum eft tertiò, ad argumentum ex rationibus diffimilibus, plurimum pertinere formas illas argumentandi, quibus Euclides, permutando, inuertendo, componendo, diuidendo & ex æquali, vfus eft in rationibus fimilibus: atque omnes illas, diffimilibus rationibus applicuit Auctor, propofitione 44. 45. 46. 47. 48. 49. ergo &c.

Certum eft quartò, ad argumentum à rationibus diffimilibus fpectare formas illas argumentandi, quibus Arithmetici, addendo, multiplicando, diuidendo, fubtrahendo vtuntur; atque illas etiam Auctor totâ parte quintâ lib. 8. diffimilibus applicuit rationibus, ergo &c.

Quæro nunc ab Alexio, num ad argumentandi modum ex rationibus diffimilibus, præter iam dicta aliud requirat, an non: fi prius, quid velit edat, & ilicò id in Auctoris libro oftendam, vel ex eo deducam. fi pofterius, fidem igitur fuam liberauit Auctor, & quod facturum fe promifit, præftitit abundè.

Afferit 3. antiquis haud ignotum fuiffe argumentandi modum à rationibus diffimilibus, non quidem proximis, quia id fieri nequeat, neque id Auctor vfpiam demonftrarit, fed remotis.

Affertionis huius falfitas, ex præcedenti parte manifefta eft. cum enim ante & præter Auctorem, nemo rationum diffimilium, item proportionum quarumcunque denominatores exhibuerit, illarumque proportiones, ac proportionum rationes notas fecerit, nemo item formas argumentandi, quibus Euclides lib 5. & Arithmetici in fractionibus vtuntur, diffimilibus rationibus applicuerit, atque in his tota confiftat methodus argumentandi à rationibus diffimilibus, nemo vtique ex iifdem argumẽtari potuit, adeoque modum illum argumentandi à rationibus diffimilibus notum habuit.

Quod addit, à rationibus diffimilibus proximis, argumentum defumi non poffe, neque id ab Auctore vllibi factum effe, plane vt reliqua, falfum eft: nam argumentari à rationibus diffimilibus proximis, nil aliud eft, quam diffimiles rationes immediatè interfe conferre, & proportionem illarum notam reddere, & cum alia diffimilium rationum propórtione comparare: quod Auctor toto proportionalitatum libro non tantum agit, fed vnicè agit, & in hoc totus collimat liber.

Propo-

Propositio autem illa, quam eandem ait esse cum 60 Auctoris, toto cælo ab hac differt; nec quidquam habet commune aut simile; neque magis spectat ad argumentationem ex rationibus dissimilibus proximis, quam Auctor docet, quam quod maximè est inpertinens, quale illud quod de rectangulis quatuor proportionalibus addit, & quidquid spectat ad rationem compositam.

LIBRI PRIMI FINIS.

SYLLABVS CAPITVM

ET MATERIARVM

LIBRI PRIMI.

CAPVT I, Pars 1. *Quid ratio? an sit vera quantitas, & qualis.* Pars 2. *Errores Meibomij.*

CAP. II. *Inter quas magnitudines detur ratio. an inter finitam & infinitam, curuam & rectam, angulos contingentiæ, &c.*

CAP. III. *De modo duplici rationes inter se comparandi. altero quidem secundum quantitatem, altero secundum multiplicationem. item an & in quo differat ratio multiplex à multiplicata, dupla à duplicata, tripla à triplicata &c.*

CAP. IV. *Quid proportio, medietas, proportionalitas; Marci Meibomij errores de proportione.*

CAP. V. *De natura & munere denominatarum, rationum ac proportionum numeris expressarum.* Pars 1. *de denominatore rationis solitariè sumptæ.* Pars 2. *de denominatore proportionis.*

CAP. VI. *De natura & munere denominatorum, rationum ac proportionum irrationalium:* Pars 1. *de denominatore rationis solitariè sumptæ:* Pars 2. *de denominatore proportionis:* Pars 3. *de inuentione denominatorum quarumcunque rationum ac proportionum.*

CAP. VII. *Digressio ad Clarissimum virum A A: qui Censoris nomine deinceps venit. compendium nouæ illius de rationibus doctrinæ, & iudicium P. Gregorij de eadem.*

CAP. VIII. *Digressio ad Euthymium Grammaticum:* Pars 1. *Thrasonismi Euthymij Grammatici.* Pars 2. *Calumniæ eiusdem in præcipuos Geometras.* Pars 3. *Synopsis doctrinæ Euthymij Grammatici;* Pars 4. *Antiquorum propositiones ab eodem falsitatis aut malæ demonstrationis accusatæ.*

CAP. IX. *An logarithmi aut spatia hyperbolica, rectis lineis vni asymptotorum paralelis inclusa, sint rationum denominatores, contra Censorem A A.*

CAP. X. *De ratione æqualitatis.* Pars 1. *quo sensu æqualitatis ratio, cæterarum sit elementum.* Pars 2. *reijcitur doctrina Censoris A A.* Pars 3. *reijciuntur errores Euthymij Grammatici.*

CAP. XI. *De rationum æqualitate.* Pars 1. *explicatur definitio 6. lib. 5. Eucl.* Pars 2. *expenditur iudicium æqualitatis rationum à recentiore nuper allatum.*

Pars 3.

Pars 3. *proprietates aliquot æqualitatis rationum.*

CAP. XII. *De mutuo rationum excessu & defectu secundum quantitatem.* Pars 1. *an maioritas vnius rationis super alia, desumenda sit penes multiplicationem.* Pars 2. *vnde desumi debeat maioritas & minoritas rationum secundum quantitatem.* Pars 3. *regula ex quibus dignosci queat, vtra ex propositis rationibus, sit maior minorúe alterâ.* Pars 4. *reijcitur doctrina Censoris A A.* Pars 5. *reijciuntur errores Euthymij Grammatici.*

CAP. XIII. *An rationes possint considerari vt fractiones seu minutiæ? reijciuntur errores Euthymij Grammatici.*

CAP. XIV. *De rationum additione.* Pars 1. *an additio rationum ab earundem multiplicatione differat, & in quo.* Pars 2. *quâ methodo fiat rationum additio.*

CAP. XV. *De rationum compositione & multiplicatione.* Pars 1. *rationum compositio, solâ multiplicatione perficitur.* Pars 2. *reijcitur doctrina Censoris A A.* Pars 3. *quo pacto fiat rationum multiplicatio.* Pars 4. *vtra ex duabus rationibus propositis, sit alterius multiplicata, & quoties.* Pars 5. *vindicatur à censura propos. 75. operis Geom. lib. 8.*

CAP. XVI. *De rationibus proportionalibus.*

CAP. XVII. *Spongia centuriæ Censurarum quas in lib. 8. P. Gregorij, tulit Censor A A.*

CAP. XVIII. *Censura quindecim Theorematum, à Censore A A propositorum.*

CAP. XIX. *Digressio ad Alexium Syluiũ Polonum de proportionalitatibus.*

FINIS.

PRIMA CIRCVLI QVADRATVRA.

PARS PRIMA

Explicatio propositionum aliquot primæ quadraturæ, quæ perperam à nonnullis intellectæ, occasionem dedere, primam quadraturam vitij & paralogismi arguendi.

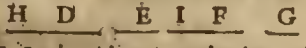
De Propositionibus 5. & 6. lib. 10. Auctoris.

INter eas propositiones, quæ ad euertendam quadraturam primam in dubium vocatæ sunt, primum locum obtinent propositiones, quinta & sexta lib. 10. operis geom. quas non solum vt non rectè demonstratas, sed vt falsas, se inuicem euertentes, chymericas &c. censuit non nemo, huiusmodi scripto ad amicum Geometram misso; quod tam clarum & liquidum censebat illius Auctor, atque vlla in toto opere geometrico est demonstratio.

Defectus quadraturæ P. Gregorij à S. Vincentio.

PAralogismus primus est in lib. 10: propos. 5. quæ est huiusmodi. Data sit ratio A, ad quamuis aliam quantitatem diuisam in B C: dico, quod ratio A ad B, excedat rationem A ad BC, ratione C ad B. ratio A ad B, ad rationem A ad B C; per præcedentem, æquatur rationi B C ad B, ad rationem B ad B; sed etiam ratio B C ad B, superat rationem B ad B, ratione C ad B, igitur etiam ratio A ad B, superat rationem A ad B C, ratione C ad B.





Manifestè deficit vltima consequentia: & peccat contra propos. 17. 5. quæ docet, si fuerint quatuor quantitates D, E, F, G, & quidem vt D ad E, ita F ad G: sit vero excessus quo D superat E, ipsa D H; non fore ipsam D H, excessum quantitatis F, super G, quod propositio in consequentia, quam deficere dixi, assumit: sed excessum F I, quo F superat G, fore proportionalem excessui, quo D H superat E; sic vt sit D H ad E; sicut F I ad G: quod ad oculum patet in numeris 10. 5. 40. 20. *excessus enim sunt* 5 & 20, *oportebat igitur inferre, ratio A ad B superat rationem A ad B C aliquâ ratione, quæ ita se habet ad rationem A ad B, sicut ratio C ad B ad rationem C B ad B.*

Idem prorsus error interuenit in propos. proximè sequenti; in vltima item consequentia: ex quo fit, vt duæ hæ propositiones se inuicem manifestè euertant, dum prima dicit, rationem A ad B, excedere rationem A ad B C ratione C ad B, secunda autem dicit in æquiualentibus terminis, rationem A ad B excedere ratio-

nem

nem A ad B C, ratione C ad A; vnde consequens est, rationem C ad A semper æquari rationi C ad B, adeoque semper æquales esse A & B, cum tamen iuxta sensum propositionum, possint in qualibet differentia inæqualitatis, esse quantitates A & B.

Obseruatum est quidem hoc in scholio immediatè sequenti, sed minimè solutum: quod patet hâc vnicâ obseruatione, quod rationes C ad B, & C ad A, quæ dicuntur esse excessus, eadem semper sint cum quibuscunque aliis collatæ: idem enim prorsus eueniet quod in quantitatibus absolutis, quæ si dicantur esse excessus supra quasdam alias, eodem modo erunt, siue conferantur cum aliis quibuscunque, siue non, comparatio enim siue respectus ad alias, in se non variat, etsi aliam atque aliam faciat proportionem.

Eundem errorem continet 7 & 8, cum prioribus innitantur. Item & 12 quæ innititur 8; verum hæc præterea alium paralogismum continet, quod fiat progressus à rationibus auctis per multiplicationem, ad rationes Auctas per additionem: v. g. à rationibus duplicatis, ad rationes duplas; continentia enim de qua propositio loquitur, est per additionem, medium autem quo vtitur ex lib. progress. est per multiplicationem.

Hæc est censura, hæ annotationes tam veræ & liquidæ; atque vlla in toto opere geometrico est demonstratio: sed quam veræ & liquidæ illæ sint, egregiè ostendit, qui ex sola libri inspectione, non consulto Auctore, prætensos paralogismos diluit, R. P. Ioannes Baptista Giattinus; vir in philosophicis & Theologicis solidè doctus, latinæ, Græcæ, hebraicæ, Arabicæ litteraturæ bene peritus, in subtilitatibus mathematicis oculatissimus.

Responsum R. P. Ioannis Baptistæ Giattini. S. I.

Legi 5 & 6 propositionem lib. 10, & nullum in eis inueni paralogismum: solum si accipiantur vt ibi iacent, dant occasionem primâ fronte, ex defectu aliquorum verborum, vt in alio sensu intelligantur. Sed Auctor scholion immediatè subiungit, quo adduntur ea verba, quæ si fuissent addita ipsis demonstrationibus, fuissent omnia euidentia, etiam cursim legentibus; quia tamen Auctor citat aliam demonstrationem, nempe 114 propositionis lib. 8, accipit aliqua verba 5 & 6 propositionis in eo sensu quem explicauerat ad propos. citatam: formo itaque demonstrationem quintæ, addendo duo verba ex ipso Auctoris scholio, explicantia sensum Auctoris, & propositio erit clara, & iuxta Euclidem & rei veritatem.

Demonstratio propos. 5. lib. 10.



Ratio A ad B ad rationem A ad BC, per præcedentem, æquatur rationi BC ad B, ad rationem B ad B, sed ratio BC ad B, superat rationem B ad B, ratione C ad B ad rationem CB ad B, igitur etiam ratio A ad B, superat rationem A ad BC, ratione C ad B ad rationem CB ad B. quod erat demonstrandum.

A 20.
B 15. C 5.

Quare excessus, tam in minori quam in conclusione, non est nuda ratio C ad B (quod esset apertè falsum) sed ratio rationis C ad B, ad rationem CB ad B: quod verum est, vt apparet in his numeris A 20. B 15. C 5. ratio enim A ad B 20 ad 15, ad rationem A ad BC 20 ad 20, æquatur per præcedentem, rationi BC ad B 20 ad 15: ad

15, ad rationẽ B ad B 15 ad 15: quod verum est: sed ratio B C ad B 20 ad 15, superat rationem B ad B 15 ad 15, ratione C ad B 5 ad 15, ad rationem C B ad B 20 ad 15: quod etiam verum est, nam ex doctrina Auctoris prop. 2. l. 8. ratio 5 ad 15, ad rationem 20 ad 15, (quia vtraque ad idem consequens) se habet vt antecedens ad antecedens, nempe vt 5 ad 20: sed 5 respectu 20 est quarta pars, ergo ratio B C ad B 20 ad 15, superat rationẽ B ad B 15 ad 15, quartâ parte ipsius 20. adeoque nu. 20 si quarta pars detrahatur, remanet 15, & ita fient rationes æquales 15 ad 15, & 15 ad 15: quia à ratione 20 ad 15, ablatus est excessus, quo superabat rationem æqualitatis 15 ad 15: quare vera est minor demonstrationis, si benè & iuxta mentem Auctoris intelligatur; vera est eodem modo consequentia: igitur etiam ratio A ad B 20 ad 15, superat rationem A ad B C 20 ad 20, ratione C ad B 5 ad 15, ad rationem C B ad B 20 ad 15; quia ob eam doctrinam & demonstrationem iam explicatam Auctoris, superat illam quartâ parte numeri 20: quâ ablatâ, fient rationes æquales 15 ad 15. & 20 ad 20.

Simili modo vera est 6. propositio, si eius demonstratio eodem modo intelligatur iuxta mentem & doctrinam Auctoris: bene enim concludit, quod ratio A ad B 20 ad 15, excedat rationẽ A ad B C 20 ad 20, ratione C ad A 5 ad 20, ad rationem B C ad A 20 ad 20; cum enim ratio C ad A 5 ad 20, & ratio B C ad A 20 ad 20, habeant idem consequens; per 2. l. 8, se habent vt antecedens ad antecedens, nempe vt 5 ad 20: sed 5 ad 20 se habent vt quarta pars respectu 20, ergo ratio A ad B 20 ad 15, superat rationem A ad B C 20 ad 20, per quartam partem antecedentis, quâ ablatâ fiet æqualitas rationum 15 ad 15, & 20 ad 20, vt patet.

Cæterum cum hic Auctor in lib. de proportionalitatibus, ponat sua principia, & incedat nouâ viâ, demonstratiuè semper progrediendo, mirum non est quod difficilior sit; & nisi eius principia, & ratio progrediendi ac demonstrandi in hac materia diligenter examinentur, & intelligantur, facilè erit eius propositiones ac demonstrationes non accipi in eo sensu in quo ab ipso accipiuntur.

Ex his patet, ad instantiam ex Euclide: cum hic non sumatur nuda proportio C ad B, sed proportionalitatis modo dicto. neque peccat vllo modo propos. 12, eiusdem lib. nam id quod supponit, vt vidimus, verum est; quod autem confundat multiplicationem cum additione, falsum est euidenter; semper enim loquitur de multiplicatione, & fit progressus à rationibus auctis per multiplicationem, ad rationes auctas etiam per multiplicationem; non autem per additionem, vt obijcitur: nam ratio A L, continet per multiplicationem bis C N, & ratio C H continet bis per multiplicationem rationem D O: similiter etiam ex demonstratione 27 progress. ratio A Q, continet etiam per multiplicationem bis rationem C S; & C S continet etiam per multiplicationem bis D T, ergo semper loquitur de progressu per multiplicationem, non per additionem: legatur attentè propos. 27. de progress. à qua desumitur medius terminus huius 12, & reperietur quod Auctor semper loquatur eodem passu de multiplicatione.

Hucusque R. P. Ioannes Baptista Giattinus; ex quo manifestum est eos qui propositiones illas vt falsas, vt se inuicem euertentes condemnarunt, nihil nisi nodum in scirpo quæsiuisse.

Cæterum, si quis vlteriorem huius materiæ deductionem, & fusiorem explicationem desideret, is elegantem tractatum P. Alphonsi de Sarasa, quem ea de re conscripsit, legat; multaque istic lectu digna, & quæ paucis fuere nota reperiet.

DE PROPOSITIONE VII. & VIII.

Lib. 10. Auctoris.

A C E
B D F

Duobus modis hucusque Geometria, rationem duarū quantitatum ad duas alias, vel plurium ad plures exhibuit: prior ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 12: & est huiusmodi: si fuerit vt A ad B, ita C ad D, & E ad F &c. erunt omnes A C E, ad omnes B D F, vt prima A ad primam B.

ABC DEF
GHM IKL

Posterior, Archimedis est propos. 2. de conoid. si fuerit vt A ad B, ita D ad E, & vt B ad C ita E ad F, fueritque insuper vt A ad G ita D ad I, & vt B ad H ita E ad K, denique vt C ad M ita F ad L, erunt omnes A B C ad omnes G H M, vt omnes D E F ad omnes I K L.

Quia vero propositiones illæ certas ac determinatas quantitatum limitationes requirunt, nouam Auctor & vniuersalem adinuenit methodum, quotcunque & qualescunque quantitates comparandi, cum totidem aut pluribus aut paucioribus aliis, etiam quibuscunque. quæ adinuentio, non adeo leuis est momenti, vt nonnulli existimarunt; sed eo vergit, vt ex rationibus omnibus secundum quas, partes in quas tota diuisa sunt, conferri interse possunt, totorum rationes innotescant. quæ res vt melius intelligatur, pauca prius annotabo, quam ad demonstrationes procedam.

A
B C

Sit ratio quæuis A ad B, & ipsi B intelligatur addi quantitas C demonstrat Euclides lib. 5. propos. 8. quod ratio A ad B, sit maior ratione A ad B C; quod verissimum est, quidquid opponat Censor, vt ostendi cap. 12. lib. primi. explicandum modo est, quomodo, & qualis fiat alteratio, tam in ratione A ad B, quam in ratione B ad A, per accessum quantitatis C, ad quantitatem B.

Pro qua re, aduerte 1. inter omnes duos terminos duplicem esse relationem: vnam, quâ A vt antecedens, refertur ad B vt consequens; alteram (quæ priori correspondet) quâ B vt antecedens, refertur ad A vt cōsequens: quæ duæ relationes, ita essentialiter interse sunt cōnexæ, vt vnâ crescente, altera necessario decrescat, & viciſsim vnâ descrescente, crescat altera.

Aduerte 2. per accessum quantitatis C ad quantitatem B, non tolli relationem A ad B, aut B ad A, sed hanc augeri, illam vero minui: angetur relatio B ad A, relatione C ad A, quæ cum priori facit relationem B C ad A, maiorem vtique quam sit relatio B ad A: & quia relatio B ad A crescit per accessum C ad B, necessario decrescit correlatio A ad B, & fit relatio A ad B C.

A
B C

Aduerte 3. quod sicut per accessum quantitatis C ad B, noua oritur relatio C ad A, distincta à relatione B ad A, ita viciſsim noua oritur correlatio A ad C, distincta à relatione A ad B. quod clarius patet si A & B ponantur æquales, & C dupla ipsius A vel B tunc enim relatio C ad A, erit dupla, & correlatio A ad C subdupla, cum tam A ad B, quam B ad A, sit æqualitatis.

Aduerte 4. quod per accessum C ad B, sicut relatio C ad A, accedens ad relationem B ad A, facit relationem B C ad A, ita correlatio A ad C, accedens

accedens relationi A ad B, facit relationem A ad B C: & ſicut relatio B C ad A, maior eſt relatione B ad A, ita relatio A ad B C, minor eſt relatione A ad B: quæritur modo, quare relatio C ad A, accedens relationi B ad A, faciat quid maius, correlatio autem A ad C, accedens relationi A ad B, faciat quid minus: pro quo

Aduerte 5. quod relatio C ad A accedens relationi B ad A, exſurgat ex augmento antecedentis B, per additionem quantitatis C, inuariato manente conſequente A: aucto autem B antecedente, inuariato conſequente A, ſemper creſcit ratio B ad A, & quidem eâ proportione quâ creſcit antecedens B. vnde relatio C A accedens relationi B A, facit relationem B C ad A, maiorem quam fuerit B ad A. quia vero correlatio A ad C, non oritur ex augmento antecedentis A, ſed conſequentis B, per acceſſum C ad B, neceſſario relatio A ad C accedens relationi A ad B facit relationem A ad B C, minorem quam fuerit relatio A ad B: aucto enim conſequente B, inuariato antecedente A, diminuitur ratio A ad B. & quidem eâ proportione quâ creſcit conſequens B.

Aduerte 6. quod ſicut relatio C ad A accedendo relationi B ad A hanc auget & oſtendit quantum relatio B ad A, creuerit per acceſſum C, ad antecedens B, ita correlatio A ad C, accedendo ad A B, hanc imminuit & oſtendit, quantum relatio A ad B defecerit per acceſſum C ad conſequens B, ſiue quantum B excreuerit per acceſſum C: vnde acceſſus relationis A C ad relationem A ad B non eſt additio ſed mutilatio.

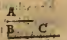
Aduerte 7. quod dum Euclides demonſtrat, rationem A ad B C, minorem eſſe ratione A ad B, conſiderauerit duas illas relationes A ad B, & A ad C per modum vnius quod exſurgit ex additione quantitatis C ad quantitatem B, quia hoc propoſito illius ſufficiebat; quia tamen per acceſſum C ad B, ſicut noua oritur relatio C ad A, diſtincta à relatione B ad A, ita noua quoque exſurgit correlatio A ad C, diſtincta à relatione A ad B, & Auctor illâ conſideratione ad propoſitum ſuum indigeat, duas illas relationes A ad B, & A ad C in ratione A ad B C, vt diſtinctas, quales verè ſunt, contemplatur. ex quibus patet doctrinam Auctoris, quam in propoſ. 7 & 8 tradit, non eſſe fictitiam aut chymericam, (vt nonnulli, minus in rationum natura verſati, exiſtimarunt) ſed veriſſimam eſſe, & planè in Euclide fundatam.

His prænotatis, facilis erit propoſitionis 7 & 8 demonſtratio. quas quia Auctor ex 5 & 6 deducit, illas primum in vero ac genuino ſuo ſenſu proponam ac demonſtrabo.

PROPOSITIO V.

Lib. 10.

Sit A antecedens, & conſequens diuiſum vtcunque in B & C. dico quod ratio A ad B, excedat rationem A ad B C, parte aliquâ rationis A ad B, quæ ad ipſam rationem A ad B ſe habet, vt ratio C ad B eſt ad rationem B C ad B.



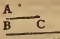
Ratio A ad B, eſt ad rationem A ad B C, vt B C ad B per 7 de proport. ſed vt B C ad B, ita eſt ratio B C ad B ad rationem B ad B per 2 eiuſdem, igitur vt

ratio B C ad B est ad rationem B ad B, ita ratio A ad B est ad rationem A ad B C, sed ratio B C ad B, superat rationem B ad B, ratione C ad B (quæ pars est rationis B C ad B per 114. eiusdem) igitur & ratio A B, superat rationem A ad B C, parte aliquâ rationis A ad B, quæ ad ipsam rationem A B se habet, vt ratio C ad B est ad rationem B C ad B. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Lib. 10.

IIsdem positis; dico rationem A ad B C, deficere à ratione A ad B, ratione aliquâ, quæ ad ipsam ratioñe A B se habet, vt ratio C ad A se habet ad rationem B C ad A.



RAtio C ad A est ad rationem BC ad A, vt C est ad B C; per 2 de proport. sed vt C ad B C, ita se habet ratio C ad B ad rationem B C ad B, per eandem; igitur ratio C ad A est ad rationem B C ad A, vt ratio C ad B est ad rationem B C ad B: sed ratio A ad B, per præcedentem, superat rationem A ad B C, excessu aliquo rationis, qui ad ipsam rationem A B se habet vt ratio C ad B se habet ad rationem B C ad B, igitur & ratio A B superat rationem A ad B C, excessu aliquo rationis, qui ad ipsam rationem A ad B se habet, vt ratio C ad A ad rationem BC ad A; igitur ratio A ad B C deficit à ratione A ad B, defectu aliquo rationis, qui ad ipsam rationem A ad B, se habet vt ratio C ad A ad rationem B C ad A. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Lib. 10.

IIsdem positis: dico rationem A ad B C constitui ex duabus rationibus A ad B & A ad C.

RAtio A ad B C resultat ex augmento consequentis B, per accessum quantitatis C. igitur ratio A ad B C constituitur ex iis quæ resultant ex additione C ad B: sed per accessum quantitatis C ad B non tollitur relatio A ad B sed accedit relatio A ad C, quæ quia oritur non ex augmento antecedentis A, sed ex angmento consequentis B, diminuit relationem A ad B vt ostendi notabili 5 & 6 pag. 93. igitur ratio A ad B constituitur ex duabus rationibus A B, A C.

Eadem propos. aliter demonstratur.

RAtio A ad B C per 6. lib. 10. æquatur rationi A ad B diminutæ ratione aliquâ quæ ad ipsam A B se habet, sicut ratio C ad A est ad rationem B C ad A. sed ratio A B sic diminuitur per accessum rationis A C (quia cum hæc oritur ex augmento consequentis B per C, non additur rationi

rationi A ad B, sed hanc imminuit) igitur ratio A ad B C constituitur ex duabus rationibus A B ad A C.

Idem demonstratur in numeris.

Sit A 12. B 2. C 4. ratio A B reducta ad minimos numeros erit ratio 6 ad 1; ratio A C reducta ad minimos numeros, quos patitur commune antecedens 6, est ratio 6 ad 2. addantur consequentes 2 & 1, exsurgent 3: eritque ratio A ad B C ratio 6 ad 3: sed quia ratio A B 6 ad 1 per accessum rationis A C, tantum diminuitur, quantum ratio B ad A crescit per accessum rationis C ad A, ratio autem B A subsextupla, per accessum rationis C ad A subtriplæ, fit ratio B C ad A, subdupla; igitur ratio A ad B sextupla per rationem A C triplam, diminuitur & fit ratio A ad B C, dupla:

	A	
	12	
B		C
2		4

Propositio 7 quoad rem non differt à sexta, sed in modo loquendi; idque ea de causa tantum, quod in 7, explicitè in considerationem adducatur ratio A ad C, cuius in 6 explicitè mentio non fit.

PROPOSITIO VIII.

Lib. 10.

Quemadmodum propositio 6 differt à 7, penes modum loquendi tantum, eademque ratio A ad B C in 6 comparatur cum ratione A ad B diminuta, in 7 vero cum rationibus A B, A C: ita octaua propositio, secundum duplicem loquendi modum explicari & demonstrari potest: quorum vtrumque iam præstabo.

Sint A B, C D termini, rationis A B ad C D, vtcunque diuisi:

A B
C D

Dico 1. rationem vtriusque A B ad vtrumque C D, æquari rationi A B ad C, mutilatæ parte aliqua sui, quæ sic se habet ad ipsam rationem A B ad C, vt ratio D ad A B se habet ad rationem C D ad A B. Ratio A ad C, addita rationi B ad C, æquatur rationi A B ad C, per 114 lib. 8. similiter ratio A ad D, addita rationi B ad D, æquatur rationi A B ad D: cum igitur duæ rationes, A B ad C, A B ad D, idem habeant antecedens A B, & consequens diuisum; erit per 6 lib. 10, ratio A B ad totum C D, æqualis rationi A B ad C, mutilatæ parte aliqua sui, quæ ad ipsam rationem A B ad C se habet, sicut ratio D ad A B, est ad rationem C D ad A B: quod erat demonstrandum.

Dico 2. rationem A B ad C D, constitui ex quatuor rationibus A C, A D, B C, B D. Ratio A ad C D, addita ratio B ad C D, facit rationem A B ad C D, per 114. lib. 8: sed ratio A ad C D, per 7 lib. 10, constituitur ex rationibus A C, A D, similiter ratio B ad C D, constituitur ex rationibus B C, B D, igitur ratio A B ad C D, constituitur ex rationibus quatuor A C, A D, B C, B D. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Lib. 10. oper. Geom.

SInt quatuor ordines quinque continue proportionalium ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, habentes vltimas quantitates EKPV æquales.

Dico rationem duarum AF ad duas LQ, toties continere rationem duarum CH ad duas NS, quoties hæc ratio continet rationem duarum DI ad duas OT.

Hoc est prout Auctor intelligit.

DIco, rationem duarum AF ad duas LQ, constitui ex iis rationibus, secundum prop. 8. iam explicatam, quæ toties sunt multiplicatæ rationum, ex quibus constituitur ratio duarum CH ad duas NS, quoties hæ ipsæ rationes multiplicant eas, ex quibus constituitur ratio duarum DI ad duas OT.

A B C D E
F G H I K
L M N O P
Q R S T V

Ratio duarum AF ad duas LQ, iuxta 8 ante explicatam, constituitur ex quatuor rationibus AL, AQ, FL, FQ: similiter ratio duarum CH ad duas NS, constituitur ex rationibus CN, CS, HN, HS; denique & ratio duarum DI ad duas OT, constituitur ex rationibus DO, DT, IO, IT: sed rationes AL, AQ, FL FQ, toties sunt multiplicatæ rationum CN, CS, HN, HS (singulæ nimirum singularum sibi correspondentium) quoties hæ ipsæ sunt multiplicatæ rationum DO, DT, IO, IT per 27. de progres. igitur ratio AF ad LQ, constituitur ex iis rationibus, quæ toties per multiplicationem continent rationes, ex quibus constituitur ratio CH ad NS, quoties hæ ipsæ rationes per multiplicationem continent rationes, ex quibus constituitur ratio DI ad OT. quod erat demonstrandum.

Hinc patet quid Auctor intelligat per verbum continere (ex quo solo verbo male intellecto, omnes errores nati sunt; non enim vult rationem AF ad LQ toties per multiplicationem continere rationem CH ad NS, quoties hæc per multiplicationem continet rationem DI ad OT; sed rationem AF ad LQ, iuxta octauam, continere eas rationes, siue ex iis constitui, quæ toties sunt multiplicata rationum quas continet siue ex quibus constituitur ratio CH ad NS, quoties hæ ipsæ sunt multiplicatæ rationum quas continet siue ex quibus constituitur ratio DI ad OT.

PRO-

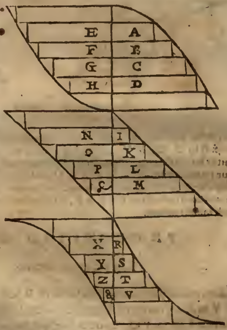
PROPOSITIO XXXIX.

Lib. 10. oper, Geom.

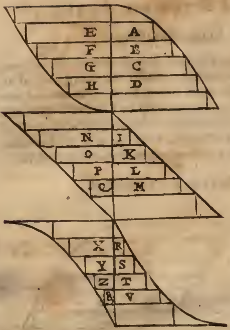
DEmonſtrandum eſt in hac propoſitione(omitto breuitatis cauſa, ſcema vniuerſale,& conſtructionem, quæ apud Auctorem videri poteſt) quod ratio duorum paralelopipedorum ex R in X,et S in Y,ad duo paralelop.ex T in Z et V in &, toties contineat rationem duorum paralelop. ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q, quoties hæc ipſa ratio, continet rationem duorum ex A in E & B in F, ad duo ex C in G & D in H.

Hoc eſt vt Auctor intelligit.

QVod ratio duorũ paralelop. ex R in X & S in Y, ad duo ex T in Z et V in &, iuxta 8, ex iis conſtituatur rationibus, quę toties multiplicatæ ſunt rationum, ex quibus conſtituitur ratio duorum ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q, quoties hæ ipſæ rationes multiplicatę ſunt earum, ex quibus cõſtituitur ratio duorum paralelop. ex A in E, & B in F,ad duo ex C in G & D in H.



RAtio duorum paralelop. ex R in X & S in Y, ad duo ex T in Z et V in &, iuxta 8, conſtituitur ex quatuor rationibus, nimirum ex ratione R in X ad T in Z, R in X ad V in &, S in Y ad T in Z, S in Y ad V in &: ſimi-



& : ſimilirer ratio duorum ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q conſtituitur ex rationibus I in N ad L in P, I in N ad M in Q, K in O ad L in P, K in O ad M in Q: denique ratio duorum ex A in E & B in F, ad duo ex C in G & D in H, conſtituitur ex rationibus A in E ad C in G, A in E ad D in H, B in F ad C in G, B in F ad D in H. ſed per 38, & coroll. eiuſdem, lib. 10. Auctoris, ratio R in X ad T in Z, toties multiplicat rationem I in N ad L in P, quoties hæc ipſa multiplicat rationem A in E ad C in G, & ita deinceps de cæteris rationibus omnibus. igitur ratio duorum ex R in X & S in Y, ad duo ex T in Z et V in &, ex iis conſtituitur rationibus, quæ toties multiplicant rationes, ex quibus conſtituitur ratio duorum ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q, quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum, ex quibus conſtituitur ratio duorum ex A in E & B in F, ad duo ex C in G & D in H. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

Lib. 10. oper. Geom.

IIſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex R S in X Y, ad ſol. ex T V in Z &, toties continere rationem ſolidi ex I K in N O, ad ſol. ex L M in P Q, quoties hæc ipſa ratio, continet rationẽ ſolidi ex A B in E F, ad ſol. ex C D in G H.

Hoc eſt iuxta auctoris mentem.

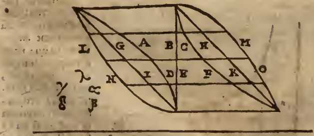
DIco rationem ſolidi ex R S in X Y, ad ſol. ex T V in Z &, conſtitui, iuxta 8, ex iis rationibus, quæ toties multiplicatæ ſunt

tæ ſunt illarum rationum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex IK in NO ad ſol. ex LM in PQ, quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex AB in EF, ad ſolidum ex CD in GH.

PEr præcedentem ratio duorum paralelopipedorum ex RS in XY ad duo paral. ex TV in Z &, conſtituitur ex iis rationibus; quæ toties ſunt multiplicatæ earum rationum, ex quibus conſtituitur ratio duorum paral. ex IK in NO ad duo ex LM in PQ, quoties hæ ipſæ rationes ſunt multiplicatæ illarum, ex quibus conſtituitur ratio duorum paral. ex AB in EF, ad duo ex CD in GH: ſi igitur paralelopipeda illis inſcripta ſolidis, non ſint maiora dimidiis corporum quibus inſcribuntur, inſcribantur tot, vt exſuperent dimidia ſolidorum quibus inſcribuntur, & eadem fiat argumentatio: cum igitur id ſemper deinceps fieri poſſit, & inſcripta maiora ſint dimidiis ſolidorum quibus inſcribuntur, manifeſtũ eſt ſolida illa per inſcriptionem continuatam exhauriri; quia vero eadẽ proprietas conuenit ipſis progreſſionis terminis vt oſtendit Auctor prop. eadem euidens eſt rationem totius ſolidi ex RS in XY, ad ſolidum ex TV in Z &, conſtitui ex iis rationibus quæ toties ſunt multiplicatæ rationum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex IK in NO, ad ſol. ex LM in PQ, quoties hæ ipſæ rationes, multiplicatæ ſunt illarum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex AB in EF, ad ſol. ex CD in GH. quod erat demonſtrandum.

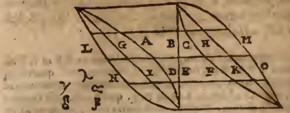
Scholium.

PRiuſquam ad propoſitionem 44, in qua totum primæ quadraturæ momentum conſiſtit, accedam, paucis expedire viſum eſt, quid & quâ ratione ex partialium illâ rationum æquimultiplicatione, propoſitione 40 demonſtratâ, de totalibus rationibus, quæ inter ſex illa ſolida reperiuntur, legitimè inferri ac concludi poſſit:



Eſto ſolidum ex AB in BC, idem quod in propoſ. 40, oritur ex plano parabolico RS in plan. parab. XY: & ſolidum ex DE in EF, idem quod oritur ex plan. parab. TV in plan. parab. Z &. item ſol. ex GB in BH, idem quod oritur ex trapezio IK in trap. NO: & ſolidum ex IE

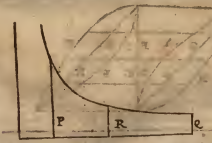
 in EK,



in EK, idem cum eo, quod oritur ex trap. LM in trap. PQ: denique solidum ex LB in BM, idem quod oritur ex plano parab. AB in plan. BF: & solidum ex plan. parab. NE in plan. parab. EO, idem quod oritur ex plano parab. CD in plan. parab. GH: vocentur autem breuitatis causa duo prima solida, AC, DF, secunda vero solida GH, IK; tertia denique, solida LM, NO.

Cum igitur cubata sint quatuor prima solida, nimirum AC, DF, GH, IK: & per propos. 43. lib. 10. oper. Geom. nota facta sit ratio, tam solidi AC ad sol. DF, quam ratio sol. GH ad sol. IK: nota quoque est proportio rationis sol. AC ad sol. DF, ad rationem sol: GH ad sol: IK: sit itaque ratio sol. AC ad sol: DF, eadem quæ α ad β: & ratio sol. GH ad sol. IK, eadem quæ γ ad δ: fiatque vt δ ad γ ita β ad λ: erit vt α ad λ ita ratio $\alpha\beta$ ad rationem $\gamma\delta$, hoc est ratio sol: AC ad sol: DF, ad rationem sol: GH ad sol: IK.

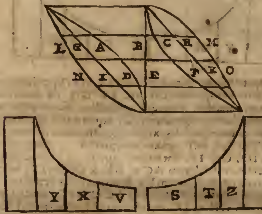
Vlterius cum rationes duæ, solidorum AC ad DF, & GH ad IK, per diuersos rectè numeris exhibitæ sint, constat rationes illas esse rationales: & tam sol. AC ipsi DF, quam sol: GH ipsi IK esse commensurabile: vnde etiam tam α ipsi β, quam γ ipsi δ erit commensurabile. quia vero ratio λ ad β, est ratio γ ad δ, erit ratio λ ad β rationalis, & λ ipsi β commensurabile: sed etiam α ipsi β est commensurabile, (cum ratio α ad β rationalis sit) igitur & α ipsi λ est commensurabile.



Assumatur itaque hyperbola, cuius asymptoti rectũ contineant angulum; in qua alteri asymptotorum paralelæ ponantur, rectæ P. R. Q. ipsis α, β, λ proportionales: nimirum vt α est ad β ita Q sit ad P: & vt λ ad β ita R ad P: rationes igitur duæ Q ad P, R ad P sunt rationales; & ratio Q ad P est ad rationẽ R ad P, sicut ratio $\alpha\beta$ est ad rationem $\lambda\beta$, hoc est ratio sol. AC ad sol: DF ad rationem sol. GH ad sol. IK: sed per 129 de hyperb. ratio QP tam est multiplicata rationis RP, quam spatium QP multi-

QP multiplex est spatij RP, igitur quam multiplex est spatium QP, spatij RP, tam ratio sol. AC ad sol. DF multiplicata est rationis solidi GH ad sol. IK. quia vero rationes QP, RP rationales sunt, necessario spatia hyperbolica QP, RP sunt inter se commensurabilia, vt facile potest demonstrari: inuenta igitur communi illorum mensura, innotescit ilico, quam multiplex sit spatium QP, spatij RP: vnde & innotescit, quoties ratio solidi AC ad sol. DF multiplicata sit rationis sol. GH ad sol. IK.

His ritè expositis, tota superest difficultas, quid & quomodo, ex duabus primis rationibus, tam secundum quantitatem, quam secundum multiplicationem notis, de tertia, nimirum ratione solidi LM ad sol. NO inferri possit.



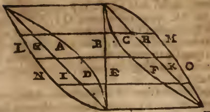
Esto eadem figura quæ prius LMNO: & ponantur duæ æquales hyperbolæ, quarum asymptoti rectum contineant angulum.

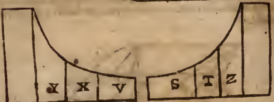
Quoniam rationes duæ solidorum AC, DF, & GH, IK notæ sunt & rationales, sciaturque insuper quoties ratio solidi AC ad sol. DF multiplicata sit rationis sol. GH ad sol. IK; sumpto in duabus hyperbolis spatia S, T, V, X, à rectis alteri asymptotorum paralelis inclusa, sic vt ratio plani hyperbolici V ad planum S, tam multiplex sit rationis plani X ad planum T, quam ratio solidi AC ad sol. DF, multiplicata est rationis sol. GH ad sol. IK: hoc posito.

Dico, rationes partiales ex quibus constituitur, iuxta 8, lib. 10. oper. Geom. ante explicatam ratio totalis planorum V & S tam esse multiplices rationum partialium ex quibus constituitur ratio plani X ad planum T, quam rationes partiales ex quibus constituitur ratio solidi AC ad sol. DF, sunt multiplicatæ rationum partialium ex quibus constituitur ratio sol. GH ad sol. IK.

Intelligantur solida quatuor AC, DF, GH, IK diuisa per inscriptionem paralelopipedorum, quemadmodum eadem diuisa fuere in prop. 40, ante demonstratam: & quia quantitates quæuis datæ corpora vel superficies diuisibiles sunt per inscriptionem siue corporum siue figurarum planarum, quemadmodum aliæ datæ quantitates per inscriptionem

 diuisæ





diuisæ sunt; intelligantur spatia hyperbolica V, S, X, T per figurarum inscriptionem ita diuisa, prout solida AC, DF, GH, IK diuisa sunt per inscriptionem paralelop. & vtraque per similem inscriptionem exhauriri. cum igitur rationes figurarum inscriptarum planis hyperbolicis V, S, X, T, sint rationes partiales ex quibus constituuntur rationes totales planorum V ad S, X ad T: rationes item paralelopip. inscriptorum solidis AC, DF, GH, IK, sint rationes, partiales ex quibus constituuntur rationes totales solidorum AC ad DF, & GH ad IK; insuper ex hypothesi ratio totalis planorum V ad S tam multiplex sit rationis totalis X ad T, quam ratio totalis solidorum AC ad DF, est multiplicata rationis totalis sol. GH ad IK, manifestum est rationes partiales constituentes rationem totalem plani V ad S, tam esse multiplices rationum partialium constituentium totalem plani X ad T, quam rationes partiales constituentes rationem totalem solidi AC ad sol. DF, multiplicatæ sunt rationum partialium constituentium rationem totalem sol. GH ad sol. IK.

Vlterius, intelligantur duo solida vltima LM, NO diuisa per inscriptionem paralelopip. vti factum in propos. 40, ante demonstrata: dein assumantur duo plana hyperbolica Y & Z rectis alteri asymptotorum paralelis inclusa, quæ per inscriptionem figurarum eo modo sunt diuisa & exhausta, quo duo solida LM, NO, per inscriptionem paralelop. diuisa sunt & exhausta.

Dico rationem totalem planorum hyperbolicorum X ad T, tam esse multiplicem rationis totalis planorum Y ad Z, quam ratio totalis solidorum GH ad IK, multiplicata est rationis totalis sol. LM ad NO.

Quoniam plana duo X & T simili figurarum inscriptione diuisa & exhausta sunt, quâ per inscriptionem paralelopip. diuisa & exhausta sunt solida duo GH, IK, idemque factum ponatur tam in planis hyperbolicis Y & Z, quam in solidis LM, NO, rationes insuper quæ reperiuntur inter figuras inscriptas planis hyperbolicis X, T, Y, Z, sint partiales illæ ex quibus constituuntur totales eorundem planorum, & rationes quæ reperiuntur inter paralelop. inscripta solidis GH, IK, LM, NO sint

par-

partiales illæ ex quibus constituuntur totales rationes eorundem solidorum, palam est rationes partiales ex quibus constituitur ratio totalis planorum hyperbolicorum X ad T, tam esse multiplices rationum partialium ex quibus constituitur ratio totalis planorum Y ad Z, quam rationes partiales ex quibus constituitur ratio totalis solidorum GH ad IK multiplicatæ sunt rationum partialium ex quibus constituitur ratio totalis solidorum LM, NO. quia vero tam plana illa hyperbolica, X, T, Y, Z, quam solida GH, IK, LM, NO, per similem figurarum & corporum inscriptionem continuatam, simul exhauriuntur, atque eadem semper rationum partialium (ex quibus constituitur ratio totalis planorum X, T) ad rationes partiales (ex quibus constituitur ratio totalis planorum Y, Z) est proportio quoad multiplicitatem, quæ est rationum partialium (ex quibus constituitur totalis ratio solidorum GH, IK) ad illas partiales (ex quibus constituitur ratio totalis solidorum LM, NO) quoad multiplicationem, manifestum est rationem totalem planorum X ad T, tam esse multiplicem rationis totalis planorum Y ad Z, quam ratio totalis solidorum GH ad IK, multiplicata est totalis rationis solidorum LM ad NO.

Hinc patet 1. grauiter errasse illos, qui ex eo, quod rationes omnes partiales ex quibus constituitur totalis ratio solidorum AC ad DF, toties sint multiplicatæ rationum partialium ex quibus constituitur ratio totalis solidorum GH ad IK, quoties hæ ipsæ rationes partiales multiplicatæ sunt earum partialium ex quibus constituitur ratio totalis sol. LM ad NO, inferebant rationem totalem sol. AC, DF, toties esse multiplicatam rationis totalis sol. GH, IK, quoties hæc ipsa ratio multiplicata est rationis totalis sol. LM, NO: id enim nullo modo sequitur, ex eo quod omnes rationes partiales sint diuersæ.

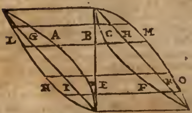
Patet 2. ex eo quod rationes partiales ex quibus constituitur ratio totalis planorum hyperbolicorum V & S sint tam multiplices earum partialium ex quibus constituitur ratio totalis planorum X & T, quam hæ ipsæ rationes partiales, sunt multiplices rationum partialium ex quibus constituitur ratio totalis planorum Y & Z, ex eo inquam non sequi, rationem totalem planorum V & S tam esse multiplicem rationis totalis planorum X & T, quam hæc ipsa est multiplex rationis totalis planorum Y & Z; quia omnes rationes partiales sunt diuersæ, nec eandem proportionem continuant, sed semper diuersam.

Illud igitur tantum ex prædictis sequitur, rationem totalem solidorum AC, DF tam esse multiplicatam rationis totalis solidorum GH, IK, quam ratio totalis planorum hyperbolicorum V & S, multiplex est rationis totalis planorum hyperbol. X & T: & rursum, rationem totalem solidorum GH, IK. tam esse multiplicatam rationis totalis solidorum LM, NO, quam ratio totalis planorum X & T multiplex est rationis totalis planorum Y & Z.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

Lib. 10. oper. Geom.



Esto eadem figura quæ prius. Dico notam esse rationem solid. L M ad solidum N O.

PEr Scholion præcedens, ratio solidi G H ad sol. I K, tam multiplicata est rationis solidi L M ad solidum N O, quam ratio plani hyperbolici X ad planum T, (vide fig. scholij præced.) est multiplex rationis plani hyperb. Y ad plan. Z: sed notum est (cum facile deduci possit ex proprietatibus spatiorum hyperbolicorum, quas Auctor lib. 6. accuratè demonstrauit) quam multiplex sit ratio planorum hyperbol. X ad T, rationis planorum Y ad Z, igitur & notum est, quam ratio sol. G H ad I K multiplicata sit rationis solid. L M ad N O. nota autem est ratio solidi G H ad sol. I K, igitur & nota est ratio solidi L M ad solidum N O. quod erat demonstrandum.

Vlterius in hac quadratura non procedo, quod stabilitâ hâc propositione, omnino sibi illa constet: quod vnicè in hoc libro spectaui ex quo patet, quantum à vero ac genuino illius sensu & Auctoris mente aberrarint omnes ij, primam ad examen qui vocarunt.

PARS SECVNDA.

Respondetur variorum obiectionibus.

RESPONSIO I.

Ad Censorem A A.

AN prima Auctoris quadratura, abeat in illud à Mersennio mutuatum problema, *datis tribus quantitatibus siue rationalibus siue irrationalibus, datisque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè inuenire.*

Vix

Vix opus Geometricum in lucem prodierat, vix Galliæ primos limites attigerat, cum ecce Tibi obuiam à Mersennio censuram, quâ libri titulum, & scopum, quâ doctrinam in illo contentam, ipsumque adeo operis Auctorem grauiter censet; atque inter alia (quorum singula speciali deinceps capite examinabo) asserere non dubitat, *in illud Auctoris quadraturas abire necdum solutum problema, quodque forsitan longè difficiliorem, quam ipsa quadratura solutionem requirit: datis tribus quantitatibus, siue rationalibus siue irrationalibus, datisque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè inuenire.*

Mersennium secutus Censor A A, contendit propos. 44. quadraturæ primæ, ac omnes deinde Auctoris quadraturas, ad idem tandem Mersennij problema reduci; iuuat ipsa Censoris verba audire:

Hanc propositionem, inquit, (id est 44.) doctißimè & verè geometricè reduxit, nunquam satis laudandus aut lugendus Mersennius in sua censura, approbante toti orbi cognito, insigni geometra Æ. R (quem vbique sub titulo nostri geometræ in suis operibus indigetat) ad illud problema, datis tribus quantitatibus &c. cum enim data sint ex hypothesi duæ rationes, si reducantur ad tres terminos, assumptis vt fieri solet ad libitum, duorum logarithmis, quorum proinde differentia nota sit, tertij logarithmus inueniendus est, vt differentia inter alios logarithmos nota sit, & proinde proportio inter has rationes, quæ est eadem cum ratione inter differentias logarithmorum, seu vt notum sit, quoties vna ratio aliam contineat.

Et infra: *reducuntur omnes (scil. quadraturæ) ad illud problema, datis duobus logarithmis, tertium proportionalem inuenire, ac tandem ad problema Mersennij.*

Rursum dum censet propos. 65. lib. 10. *hæc, inquit, reducitur quoque ad problema Mersennianum, qui parum curauit de erroribus inquirendis, cum statim in omnibus quadraturis occurrerent propositiones, dependentes à problemate æquè difficili ac ipsa circuli quadratura.*

Denique vbi idem sæpius inculcauit, ita concludit: *antequam finiam, aliquid addendum de prima parte censuræ P. Sarassæ; monendo lectores, in eo errasse, quod putauerit quantitatum irrationalium, aut earum, quæ extra series existunt, non dari logarithmos; vnde quam immeritò doctissimum Mersennium redarguerit, quod problema quasi homo non geometra, parum geometricè proposuerit, satis manifestum est; quamque peritos geometras se prodant, qui aut nihil ad quadraturas pertinere putabant Censuram Mersennianam, aut ipsam vt parum geometricam contemnebant; qui enim veram rationum naturam intellexerit, facilè videbit ad ipsum reduci quadraturas Gregorianas; qui vero quidquam in logarithmorum scientia intellexerit, problema rectè propositum non potest non agnoscere.*

Verum cuiusmodi hæc sint, modo videamus, censuramque in partes diuisam, singillatim excutiamus.

Asserit Censor 1. propositionem 44. lib. 10. doctissimè & verè geometricè à Mersennio reductam ad illud problema *datis tribus quantitatibus* &c. Certum est propositionem 44. iuxta Auctoris mentem, & genuinum sensum, quem paulo ante dedimus, intellectam, nec reductam esse neque porro reduci posse ad illud Mersennij problema, quocunque dæmum modo hoc explicetur: asserit enim illa rationem duorum vltimorum solidorum L M, N O (vid. fig. scholij præced.) notam esse ex eo, quod notum sit quoties ratio solidorum secundorum G H, I K multiplicata sit rationis solid. L M, N O, & insuper nota sit ratio solid. G H ad I K secundum

cundum suam quantitatem. Problema autem petit, *datis tribus quantitatibus &c. datisque duarum logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè exhiberi:* quæ duo non modo commune nihil habent, sed nec affine; neque hoc vt opinor negabit Ipse Censor, cum propos. 44. alio longè & à priori sensu, diuerso intellexerit: cum igitur tota primæ quadraturæ moles prædictæ propositioni, iuxta auctoris mentem explicatæ innitatur, euidens est, neque primam quadraturam ad problema illud Mersennianũ reductam esse, neque reduci posse: contendit igitur Censor propos. 44. prout illam ipse & Mersennius intellexit, ab hoc ad prædictum problema reductam esse: at illam perperam à Censore & aliis intellectam, falsumque illi affingi sensum, toto cælo ab Auctoris mente & rei veritate alienum, ostensum est præcedenti scholio: nil igitur ad rem facit, quidquid de illa egerit Mersennius; quia tamen id sæpius inculcat Censor, non pigebit hic ostẽdere, propositionem 44. nequidem eo quo volunt ipsi sensu intellectam, à Mersennio ad prædictum problema de tribus quantitatibus &c. reductam esse, aut reduci posse: sensus autem est huiusmodi: *nota est ratio duorum primorum solidorum, nota item ratio secundorum, vtpote quæ cubata sint, igitur notum est quoties ratio duorum primorum solidorum, contineat rationem secundorum, sed quoties primorum ratio continet rationem secundorum, toties hæc ipsa continet rationem vltimorum, igitur & horum ratio nota est, atque huius propositionis solutio, dependet ab hac, imo eadem est propositio, aliter proposita: datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties hæc ipsa multiplicat tertiam, oporteat tertiam rationem notam facere; igitur & hæc etiam reducta est ad problema Mersennianum datis tribus quantitatibus siue rationalibus siue irrationalibus, datisque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè inuenire.*

Atque hoc à Mersennio factum esse, sic ostendit Censor: *data sunt, inquit, ex hypothesi* (in propos. 44 & in prædicto problemate, quod cum 44. coincidit) *duæ rationes, si illæ reducantur ad tres terminos, assumptis vt fieri solet ad libitum, duorum logarithmis, quorum proinde differentia nota sit, tertij logarithmus inueniendus est &c. vt notum sit, quoties vna ratio alteram contineat.*

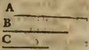
A	
B	60
C	20

Sint igitur A, B, C, tres termini ad quos reductæ intelligantur duæ rationes ab Auctore datæ: quid deinde? assumantur, inquit, vt fieri solet ad libitum, duorum v.g. C, B, logarithmi qui sint v.g. 20. & 60. factum esto. quid vltra? inueniendus est logarithmus tertij, vt notum sit quoties vna ratio alteram contineat. at quid si tertius ille terminus, in nulla sit serie in qua reperiuntur B & A? tunc certè illius logarithmus exhiberi non poterit, vt rectè (quidquid dicat Censor,) demonstrat P. Sarassa, & nos infra ad assert. 3. ostendemus. Deinde frustra logarithmi ad hoc adhibentur vt notum fiat quoties ratio v.g. A C, contineat rationem B C, vel ratio C A contineat rationem C B, cum absque illis vniuersaliter id innotescere possit per hyperbolam siue A sit in eadem serie cum B & C siue nõ, quod per logarithmos fieri non potest.

Sed esto, vt in logarithmis hæreamus, sit A in eadem serie in qua sunt B & C, & inueniendus sit illius logarithmus, vt notum sit quoties vna ratio contineat aliam. quid indẽ concluditur? an quod propos. 44. Auctoris, aut problema illud quod cum 44. coincidere & idem esse dixi, ad Mersennianum reductum sit? perridiculum; age videamus vtriusque proble-

problematis data, & quid in vtroqne exhiberi postnletur, & ilico patebit ingens discrimen, & immanis dissimilitudo.

Datæ sunt in problemate Mersennij, tres quātitates v.g. A, B, C quæcunque, & duarum ex illis v.g. B, C logarithmi: hoc est numeri exponentes quotæ sint B & C in sua serie; siue datur,



quod notum sit quoties ratio primæ proportionalis, seriei in qua sunt B & C, ad ipsum C, contineat per multiplicationem, rationem eiusdem primæ ad secundam in eadem serie; item quoties ratio eiusdem primæ ad ipsum B, multiplicet rationem eiusdem primæ, ad eandem secundā: tum petitur exhiberi geometricè, quota sit A in eadem serie, siue quoties ratio primæ proportionalis eiusdem seriei, ad ipsum A, multiplicet rationem eiusdem primæ ad secundam: quo exhibito, solutum est problema Mersennij, nec quidquam exeo vlterius infertur aut sequitur.

Alterum problema, ita proponitur: *datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties secunda multiplicat tertiam, oportet tertiam notam reddere*. datur igitur in hoc problemate, quod notæ sint duæ rationes (non solum quoad quantitatem suam, sed etiam quoad mutuam multiplicationem) datur insuper, quod quoties prima multiplicat secundam, toties hæc multiplicet tertiam: tum petitur nota reddi tertia illa secundum suam quantitatem.

Nunc fidem vestram & æquum iudicium appello, quotquot estis toto orbe Geometræ, quid isti Mersenniano problemati, cum hoc, non modo commune aut affine, sed quid vel in speciem simile, imo quid non in illis disparatum, inconiungibile, & toto diuersum cælo? in illo, dati sunt duarum quantitatum, C, B, logarithmi, hoc est, notum est quotæ illæ sint in sua serie, in hoc datæ sunt duæ rationes, eæque notæ, tam quoad quantitatem suam, quam quoad mutuam multiplicationem: in illo tertia quantitas datur, & petitur exhiberi quota sit in sua serie: in hoc petitur nota reddi tertia ratio secundum suam quantitatem; in illo tertia quantitas nullam aliam determinationem habet, quam quod sit in eadem serie cū duabus aliis; in hoc, tertia ratio eam habet determinationem, quod illam toties multiplicet secunda ratio, quoties hanc ipsam multiplicat prima. illo soluto, nil infertur aut sequitur; hoc vero vniuersaliter soluto, solutum quoque est problema deliacum; illud Geometricè soluit P. Saraſſa, hoc à nullo hactenus Geometricè solui potuit, & à multis inter impossibilia habetur.

Non igitur propositionem illam ad problema suum doctissimè reduxit Mersennius, cum reduci ne quidem possit.

At vrget Censor, & problemati Mersenniano (vbi illud rectè secundum logarithmorum leges solutum à Patre Saraſſa, atque adeo nihil ad rem pertinere vidit, secus quam existimarat ipse & Mersennus) nouum sensum affingit, vultque illud idem esse cum hoc: *datis duobus logarithmis, tertium proportionalem exhibere*: & quia logarithmos cum spatiis hyperbolicis quibusuis malè confundit, prædictum problema cum hoc vult coincidere, *datis duobus spatiis hyperbolicis, tertium proportionale inuenire*: atque inde, ait, *pendet doctissimi Mersennij defensio*. Sed præterquam quod horum problematum, prius, indeterminatum sit, & nihil significet, nihil cum Mersenniano habet commune aut simile: non enim petit Mersennus datis duobus logarithmis, tertium exhiberi proportionalem, sed datis tribus quantitatibus quibuscunque, datisque duarum ex illis logarith-

mis, petit tertiæ, quæ est quæcunque, logarithmum exhiberi : quæ duo plane diuersa esse, nemo ignorat qui logarithmorum scientiam vel à limine salutauit. de altero quod logarithmos spatiis implicat hyperbolicis, dicam infra ad assert. 3.

Asserit 2. Censor, *cognitum toti orbi Geometram*, Æ. R. approbasse partem illam Censuræ Mersennianæ, quæ dicit Auctoris *quadraturas in illud tandem abire problema, datis tribus quantitatibus* &c. atque adeo etiam propos. 44. *doctissimè ac verè geometricè ad idem problema ab eodem reductam.*

Equidem de viri illius fama, nihil detractum volo: at cum nulla illius opera (si quæ ediderit) videre hic contigerit, adeoque de illius in Geometricis scientia iudicare non possim, nihil est magnoperè cur ipsius auctoritate standum mihi sit: eorum porro iudicio viri capacitatem qui norunt, credere me si velit Censor, audiat quid de illo, ad amicum perscripserit è Suecia homo Gallus, idem & Algebrista egregius Renatus Des Cartes: verba huius sunt ipsissima: *Mais ie suis à present en vn pais si eloignie, que ie ne puis pas mesme esperer d'y voir les escrits dont vous me parlez: car outre qu'il seroit difficile de les apporter icy, ie n'y aurois pas aussi beaucoup de loysir pour les examiner: c'est pourquoy si vous escriuez au R. P. Cregorius à S. Vincentio, ie vous prie de l'asseurer de mon tres humble seruice, & de luy faire sçauoir de ma part, que bien que ie n'approuue pas sa quadrature de cercle, ie ne crois pas neaumoins que le S. Æ. R. ait assez d'esprit pour la refuter, & ainsi que pendant qu'il n'aura point d'aduersaires plus forts que cetuy la, il ne luy sera pas malaysé de se defendre.*

Quæ ita latinè reddo: *sed modo sum in regione adeo remota, vt ne quidem spes mihi sit videndi hic scripta illa, de quibus ad me scribis; & præterquam quod difficile esset, illa huc adferre, non multum mihi superesset otij illa examinandi: quocirca si ad R. P. Gregorium à S. Vincentio perscribas, rogo Te, securum illum obsequi mei vt reddas, atque illi à me significes, quod, licet illius quadraturam non approbem, non credam tamen satis ingenij esse Domino Æ. R. illam refutandi, atque adeo si aduersarios non habeat fortiores hoc, non fore illi difficile se defendere.*

Intelligit iam Censor quanti iudicium Æ. R. in quadraturæ argumento faciendum sit: nil igitur & illius & Mersennij errores, Æ. R. defendit auctoritas.

Asserit Censor 3. *errasse in hoc Patrem Sarassa, quod putauerit quantitatum irrationalium, aut earum, quæ extra series existunt, non dari logarithmos: ideoque immeritò doctissimum Mersennium redarguisse, quod problema quasi homo nō geometra, parum geometricè proposuerit.*

Quantitatum earum, quæ extra series existunt, non dari logarithmos in illis seriebus extra quas eæ sunt, rectè docuit P. Sarassa, & iure meritissimo Mersennium arguit; eiusdemque erroris ego & Mersennium & Censorem rursus arguo; & quam non immeritò, mox ostendam vbi de duobus Censorem interrogauero.

Quæro à Censore primum, vbi nam Pater Sarassa dicat, irrationalium quantitatum non dari logarithmos? quâ propositione, quâ paginâ, non dico illud asserit, sed vel obscurè innuit? certum mihi est in toto illius tractatu, nil simile ab eo dici aut innui, cujus rei tot testes sunt quot lectores.

Quæro 2. dum ait P. Sarassa in eo errare, *quod putauerit quantitatum irrationalium, aut earum quæ extra series existunt, non dari logarithmos*, quæro inquam,

inquam, an vnum idemque sit, quantitates aliquas esse irrationales, & quantitates aliquas, extra series continuè proportionalium existere? cui quæso in mentem vnquam venit, duo illa tam disparata inter se confundere? quis tyro ignorat, dari series continuè proportionalium, quarum termini omnes inter se sunt incōmensurabiles? quis neget datâ serie terminorum commensurabilium continuè proportionalium, dari posse quantitatem illis commensurabilem, quæ tamen extra totam illam seriem existat? legantur ea quæ hac de re acutè scripsit P. Saraſſa. aliud igitur est quantitates esse irrationales, aliud quantitates, extra series aliquas continuè proportionalium existere. irrationalium, si in eadem continuè proportionalium reperiantur serie, dari logarithmos nemo dubitarit, neque id uſpiam negauit P. Saraſſa. at quantitatum seu rationalium seu irrationalium, quæ extra series existunt, non posse dari logarithmos in illis seriebus à quibus sunt exclusæ, verissimè asseruit & idem sic ostendo.

Logarithmi nil aliud sunt, quam exponentes magnitudinū continuè proportionalium: siue sunt numeri, qui ostendunt quoties ratio primæ proportionalis ad secundam, contineatur per multiplicationem in ratione eiusdem primæ ad quamcunque proportionalium in eadem serie. sit v: g. series geometrica continuè proportionalium A; & alia Arithmetica B. totidem constans terminis, qui singuli, singulis seriei A correspondeant: numeri qui sunt in serie arithmetica B dicuntur logarithmi: ita Neperus, Briggius, Gunterus, Keplerus, Henrion, Herigonius &c. ex quo

A 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.
B 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

Manifestum est iuxta prædictos Auctores, illarum quantitatum, quæ extra series continuè proportionalium existunt, non dari logarithmos in illis seriebus, extra quas existunt: nam præterquam quod neque à prædictis auctoribus, neque ab vllo deinceps, talium quantitatum vnquam logarithmi exhibiti sint, aut dari postulati, admissâ logarithmorum definitione, quam primi illorum inuentores dedere, & reliqui omnes admisere, euidens est nullo modo dari posse.

Sint enim tres quantitates A, B, C, & C quidem in nulla existat serie, in qua sunt A & B, certum est per numeros exponi non posse quoties ratio A ad B per multiplicationem continetur in ratione A ad C, aut quota sit quantitas C in vlla serie in qua reperiuntur A B, cum ex hypothesi in nulla illarum sit: qui igitur quantitatis C logarithmus dari poterit in serie in qua sunt A & B, cum illius munus sit exhibere, quota sit C in serie, in qua sunt A B, aut quoties ratio A ad B per multiplicationem contineatur in ratione A ad C, quorum neutrum in illa hypothesi fieri potest? rectè igitur dixit P. Saraſſa earum quantitatum, quæ extra quasdam series continuè proportionalium existunt, non dari logarithmos in illis seriebus, neque porro dari vllo modo posse: cuius oppositum dum Censor asserit, & P. Saraſſa erroris arguit, eadem operâ doctissimos viros, Neperum, Gunterum, Briggium, aliosque logarithmorum antesignanos, quibus eadem causa est, erroris condemnat: ex quo patet, Patrem Saraſſa iure merito, immo redarguisse Mersennium, quod problema, parum geometricè proposuerit.

A

B

C

At quo tendat Censor intelligo; logarithmos cum spatiis confundit hyperbolicis, & hæc ipsi quæcunque sint, logarithmorum veniunt nomine: & quia hyperbole ad eas quoque se extendit quantitates, quæ extra series continuè proportionalium existunt, indefinitè pronunciat,

eiusmodi quantitatum dari logarithmos.

Totam logarithmorum scientiam in hyperbola exhiberi, verissimum est (atque illud non alio è fonte quam ex Auctore operis Geom. & P. Sarassa didicit Censor) item hyperbolam ad eas quantitates se extendere, quæ extra series existunt adeoque logarithmorum scientiam esse particularem, eam vero quæ ex hyperbola petitur, vniuersalem, in confesso est. at spatia hyperbolica indiscriminatim logarithmorum subire locum, vti ex ipsa logarithmorum definitione, & illorum munere ab Auctoribus assignato, falsum est, ita hæc indefinitè logarithmorum appellare nomine, error longè est grauissimus.

Porro illa tantum spatia, logarithmorum vices supplere possunt, quæ inter se commensurabilia sunt; quia tum nimirum spatia faciunt progressionem arithmeticam, & lineæ, spatia illa terminantes, sunt in progressione geometrica: secus fit in spatiis incommensurabilibus, quæ cum non habeant se vt numeri, & lineæ illa terminantes non sint proportionales geometricè, nullâ ratione esse aut dici possunt logarithmi; nisi totam logarithmorum scientiam quæ hucusque in vsu fuit deseras, illiusque leges omnes & naturam, definitionemque inmutes.

Sed age, & demus spatia hyperbolica quæcunque illa sint, logarithmorum venire nomine, & horum munus posse supplere; videamus quem sensum in falsa hac hypothesi Mersennij admittat problema; atque, an, & qua ratione Mersennij problema *datis tribus quantitatibus* &c. ad hoc reduci possit, *datis duobus spatiis hyperbolicis, tertium proportionale inuenire*: porro cum à Mersenno datæ tres quantitates, sint quæcunque, intelligatur esse tria spatia hyperbolica A. B. C. à rectis alteri asymptotorum parallelis intercepta: vt sensus sit, *datis tribus spatiis hyperbolicis quibuscunque A, B, C, datisque duorum ex illis, nimirum, A & B, logarithmis* (hoc est notum sit, quantum ratio alicuius Z ad B. multiplicet rationem eiusdem Z ad A. alium enim sensum fingere non possum) *oportet tertij, nimirum C, logarithmum geometricè exhibere* (id est oportet notum facere, quantum ratio Z ad C multiplicet rationem Z ad B) at quid problemati illi sic intellecto commune aut affine est cum hoc, *datis duobus spatiis hyperbolicis, oportet tertium proportionale exhibere*? in illo, tertium spatium datum est, & est quodcunque: in hoc, tertium datum non est: in illo, petitur exhiberi, quantum ratio Z ad tertium C, multiplicet rationem Z ad secundum B: in hoc, petitur exhiberi tertium spatium, non qualecunque, sed duobus datis proportionale, illius solutio facillima est, & à qua dependet omnino nihil: huius verò difficillima, & vniuersaliter propositi, absque mesolabio dari non potest. Nullâ igitur ratione Mersennij problema (etiam contra naturam ad spatia hyperbolica reductum) idem est, vel coincidit, vel reduci potest ad hoc problema, *datis duobus spatiis hyperbolicis, tertium proportionale exhibere*. vnde frustra ab hoc Mersennij petitur defensio.

Asserit Censor *parum peritos geometras se prodere, qui aut nihil ad quadraturam pertinere putant Censuram Mersennianam, aut ipsam vt parum geometricam contemnunt!*

Geometrica igitur est censura Mersenni? at quâ ratione? de geometricis nimirum, & de ipsa quadratura pronuntiat, an demonstrat? nihil minus: non igitur geometrica est Mersennij censura: *absurdum enim, inquit, Severum Geometrarum de problemate geometrico sine demonstratione quidquam affirmare*: at Geometra is fuit Mersennus, cuius assertio, præsertim à noto toti orbi geometra Æ. R. approbata, fidem facit de Geometra illo paulò

ante dixi:de Mersennio,ex eorum litteris didici,qui æque ac ipse Censor illi fuere obnoxij, illum istic pro magno Geometra à nemine fuisse agnitum,neque ipsum se pro tali habuisse: at rectè de quadratura Auctoris iudicauit,lectoresque de erroribus in illâ contentis,& de aliis monuit:de quadraturæ erroribus dictum est in præcedentibus,de cæteris quas censura illa continet admonitionibus, videbimus cap. vltimo: illud hic à Censore quæro,quî rectè de quadratura, vix obiter inspecto opere, iudicare potuit is,quem nullum aut certè tenuem fuisse Geometram, testantur istic omnes,quotquot hominem norunt, loquuntur opera ab ipso edita, & tu ipse non diffiteris? certè non rectè de quadratura iudicauit ille, qui ne iudicare quidem potuit. at Censura ad quadraturam saltem pertinet, quia docet,in quod problema ipsâ quadraturâ difficilius,hæc abiat. problema illud feliciter & geometricè ex Auctoris principiis soluit P. Sarassa: vnde si in illud quadratura desinat, aut ab eo dependeat, vos inde quadraturam soluite, & fateamini problema ex Auctoris principiis solutum esse,ipsâ quadraturâ difficilius. porro Auctoris quadraturam, aut propositionem aliam à qua hæc dependeat,in Mersennianum illud abire problema,aut ad hoc reductam esse,aut reduci posse,falsum ostendi primâ parte huius responsionis, non igitur Geometrica est Censura Mersennij,aut ad quadraturam vllo modo pertinet:

DIGRESSIO.

De solutione problematum Mechanica, Conica, Geometrica.

CVm sæpius in præcedenti responsione, & problematis Mersenniani, & solutionis à P. Sarassa datæ meminerim: atque à nonnullo hanc argui intelligam quasi minus Geometricam, placuit hic paucis ostendere, quid triplicem inter problematum solutionem intersit,atque solutionem à P.Sarassa datam ab impostura vindicare.

Duobus potissimum modis, problematis solutio à stricta geometria deficere potest. vno quidem, si constructio sit organica; altero si fuerit conica: constructio organica est, quando in ea aliquid determinatur, aut aliqua operatio iubetur fieri, per instrumentum mechanicum, vel per motum: talis est constructio quam Pappus & Hero adhibent ad duplicandum cubum, seu ad inueniendas duas medias proportionales, inter duas datas,ad propos. 5. lib. 3. Collectionum; item illa, quâ Eratosthenes & Nicomedes ad idem soluendum problema vtuntur. Conchoidis item Nicomedis,& Cissoides Dioclis, quæ eadem est cum illa, quam Pappus ad duplicandum cubum per motum regulæ cuiusdam describit, ad propos. 5. lib. 3. denique spiralis Archimedis, & quadratrix Dinostrati, & sexcentæ aliæ. de quibus ita Pappus lib. 8. Collectionum ad propos. 11. *Organicæ autem multæ sunt species & partes; alia enim à Mechanica, & gnomonica, & ea tractatione,quæ circa aquas versatur,ratione considerata, per instrumenta ab ipsa confecta demonstrantur; multa vero & seorsim à Mechanicis, extrinsecus ab ea perficiuntur,& nonnulla (quæ Geometricis rationibus, non facilè tractantur) assumens, instrumentis ad faciliorem constructionem perduxit: statim igitur problema quod Deliacum appellatur, cum natura solidum sit, fieri non potest vt geometricis rationibus innixi construamus; instrumentis autem mutatum in manum*

nuum operationem & constructionem magis idoneam, ea qua ab aliis exposita est, sic reducetur propositum &c.

Constructio conica est, quando in ea aliquid determinatur, vel aliqua iubetur fieri operatio, per sectiones conicas: talis est constructio propos.138. libri de hyperbola Auctoris, in qua punctum E in circulo, determinatur per hyperbolam: item constructio propositionis (quæ habetur in scholio ad propos.162.) in qua punctum D in hyperbola determinatur per intersectionem parabolæ.

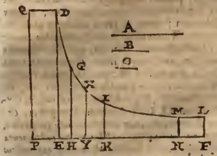
Constructio Geometrica est, in qua nihil determinatur, aut nulla iubetur fieri operatio, nisi per lineam rectam aut circulum.

Hinc sequitur 1. de sectionibus conicis dari problemata, quæ Geometricè soluantur: qualia sunt quatuordecim Apollonij problemata, quæ in duobus primis libris proponuntur, quæ cum in conicis versentur, geometricè nihilominus soluta sunt, quia in illorum constructione nihil per conica determinatur, aut nulla per eadem fit operatio, sed per strictam geometriam.

Sequitur 2. in Mechanicis quoque varia posse proponi problemata, quæ Geometricè soluantur, si nimirum in illorum constructione, nihil per motum aut instrumentum organicum determinetur, aut vlla instituatur per motum aut instrumentum operatio.

Sequitur 3. Geometricæ problematis solutioni nullo modo officere, si vel in demonstratione assumantur sectiones conicæ, vel illarum proprietates demonstratæ, vel in demonstratione ostendatur, puncta quædam per lineas rectas aut rectangula geometricè in constructione determinata, esse v.g. ad ellipsim vel parabolam, vel hyperbolam, imo ad spiralem vel quadratricem: cuius deinde proprietates in demonstratione assumuntur; quia illis positis, tota constructio adhuc manet geometrica, quod solum ad Geometricam solutionem problematis requiritur. sic Archimedes per spiralem, Dinostratus per quadratricem, dimensionem circuli geometricè dedissect, si tangentem ille, hic intersectionis punctum geometricè determinasset.

Videamus modo an constructio quam P. de Sarassa adhibet ad solutionem problematis Mersenniani, vllâ in parte à stricta deficiat Geometria.



Sint, inquit, hyperbolæ asymptati P Q, P F, angulum rectum continentes: fiatque vt B ad A, ita P H ad P K, vtque C ad A ita P H ad P F; assumptis deinde rectis A, B, C, erigantur orthogonaliter ex punctis H, K, F, vt rectè H G, K I, F L, æquales sint lineis A, B, C: tum demonstrat puncta G, I, L esse ad hyperbolam. aduerte in hac prima constructionis parte, non assumi sectionem conicam, aut iuberi illam describi, sed assumi lineas P Q, P F rectum angulum continentes, & per rationes geometricas determinari in illa-

in illarum vna P F, quædam puncta ex quibus normales eriguntur, quæ etiam geometricè determinantur: tum deinde in demonstratione ostendi, puncta extrema illarum normalium esse ad hyperbolam, cujus assymptoti sunt rectæ P Q, P F.

Pergit deinde: *ponuntur autem lineæ A, B, C, hoc est G H, I K; L F esse in eadem serie alicuius rationis, igitur commensurabiles sunt superficies G K, K L. communem igitur habent mensuram illæ superficies, quæ per octauam inuenta, ponatur esse superficies N L*: porro propositio octaua, huiusmodi continet problema (vid. Fig. P. Sarassæ) *positis A B, B C assymptotis hyperbolæ D F H, vni eorum constituantur æqui distantes rectæ D E, F G, H C continentes segmenta commensurabilia, D G, G H: oportet horum segmentorum communem maximam mensuram exhibere.* problema autem hoc licet in materia versetur conica, geometricè tamen ibidem solutum est, cum in illius constructione nihil determinetur, aut nulla iubeatur fieri operatio per conica, vt legenti patet; igitur nec ex hac parte constructio problematis de qua est quæstio, à stricta deficit Geometria.

Rursum sic procedit: *inuentâ igitur P Y, mediâ inter P H, & P K, erigatur Y X, normalis ad P F; &c. erit. Y X ad hyperbolam G I L, eritque superficies G Y æqualis Y I superficiei.* nulla hic iterum per conica fit determinatio, cum inter duas quasuis rectas, geometricè media exhiberi possit proportionalis. eodem modo determinatur punctum D, & ostenditur esse ad eandem hyperbolam G, I L.

Quartum & vltimum. *fiat vt numerus partium in quas diuisa est superficies G K, hoc est 2, ad numerum partium in quas diuisa est superficies I F, hoc est 4, ita differentia logarithmorum 6 & 10, quæ est 4, ad quartum numerum, scil. 8; & diuidatur differentia logarithmorum A & B, vt est diuisa superficies G K, nempe bifariam &c.* quid hic rursum vel in speciem conicum est, aut à stricta Geometria deficit? cætera vero omnia einsdem problematis demonstratiua cum sint, neque ad constructionem pertineant, manifestum est ex nullo capite solutionem à P. Sarassa datam; ageometricam ant conicam esse, aut à strictissima deficere geometria.

Porro ad pleniorem doctrinæ huius intelligentiam, vlterius placet indagare, cur illa tantum Geometrica ab antiquis dicta sit solutio, cuius constructio per lineas rectas & circulum instituitur; eæ vero determinationes, quæ per sectiones fiunt conicas, à stricta excludantur Geometria. Pro qua re

Notandum est ex Pappo lib. 3. collect. ad propos. 4. problematum Geometricorum, ab antiquis tria genera esse statuta; & eorum alia quidem plana appellari, alia solida, alia linearia; quæ igitur per rectas lineas & circuli circumferentiam solui possunt, merito plana dicuntur, quia lineæ per quas eiusmodi problemata soluuntur, in plano ortum habent: problemata vero quæcunque soluuntur, assumptâ in constructione aliquâ coni sectione, vel pluribus, solida appellantur; namque ad constructionẽ necesse est solidarum figurarum superficiebus, nimirum conicis vti. restat tertium genus, quod lineare appellatur; lineæ enim aliæ præter iam dictas, in constructionem assumuntur, varium & transmutabilem ortum habentes, quales sunt helices & quas græci *τετραγωνίζουσας* appellant.

Sed quare problematum planorum solutiones, Geometricæ dicuntur, aliæ vero non item? an quia rectæ lineæ, & circularis definitiones, in geometricis elementis traduntur, conicarum autem nulla fiat mentio? nullo modo; alias enim, vt rectè Souerus, nil geometricum censendum

P esset,

esset, præter elementa; quod æque absurdum, ac si quis asserat, nihil in physicis naturale esse, quod elementum non sit. an quia circuli vnico circini circumductu determinantur, quod in sectionibus conicis fieri non possit? ridiculum. Eutocius certè in secundum Archimedis de sphæra & cylindro, meminit instrumenti cuiusdam, quo parabola vnico ductu describi potest, eiusque inuentionem Isidoro Milesio magistro suo attribuit; hodieque diuersa à pluribus instrumenta excogitata sunt, quibus non parabola tantum, sed & cæteræ omnes sectiones conicæ, omnis generis concinnè describuntur. quid igitur? ego aliam non inuenio causam, cur planorum problematum solutiones præ cæteris geometricas dixerint, quam quia operationes & determinationes per rectas lineas factæ, omnium primæ ac simplicissimæ sint: porrò præter lineas rectas etiam circulum admisere, quia circulus est potentia rectæ lineæ in orbem ductæ, & ex quauis recta linea pro diametro assumpta, terminatur circulus, & tota illius quantitas circumscribitur, ita vt ratio vnius ad alium innotescat; quod non perinde fit in conicis, quarum nulla per datum axem determinatur, aut, innotescit illius ratio ad alteram: dato autem recto latere axeos v. g. parabolæ, determinatur quidem ipsa sectio, sed non terminatur, cum in infinitum produci possit, adeoque illius quantitas manet indefinita, & cum alia (nisi terminetur) incomparabilis.

Obiicitur à Squero, primum: *Elipsis, parabola, hyperbola, æque ac circuli in plano describi possunt, igitur & problemata per illas soluta, æque ac alia, plana sunt.* negatur sequela: non enim plana idcirco problemata dicuntur, quia circulus, per quem soluuntur, in plano describitur aut in plano existit; sed quia ex plano ortum habet; nimirum ex ductu rectæ lineæ (quæ vtique in plano est) in orbem: sectiones autem conicæ, originem ducunt ex cono, & illarum perimetri non in plano, sed in superficie existunt coni; adeoque si impossibilis fuisset conus, nulla vnquam in rerum natura extitisset parabola, aut hyperbola: quod autem illæ in plano iam describi possint, posterius illarum est origine, & Geometricè aliter fieri non potest, nisi ex illarum proprietatibus, quæ ex cono innotuere.

At vrget: *circulus etiam ex solidis ortum ducit, nam & ex sphæra, ex cono, ex cylindro per sectiones oritur; quin & triangulum fit sectione coni per axem, paralelogrammum sectione cylindri per axem.*

Respondeo, negando primum assumptum, circulum nimirum ex solidis ortum ducere, licet in sphæra, cono & cylindro exhiberi possit. circulus enim, priusquam Geometrarum vllus sphæram, conum, aut cylindrum, Geometricè contemplatus est, aut per plana secuit, existebat, & notus erat; existeretque etiamsi & sphæra & conus & cylindrus fierent impossibiles, aut nunquam extitissent, oritur enim ex ductu in orbem lineæ rectæ; ipse vero in orbem ductus circum axem, producit sphæram: similiter triangulum producit conum, & paralelogrammum, cylindrum, adeoque his priora sunt.

Obiicitur 2. ab eodem: *cur antiqui geometræ admirati mirificas Theorematum conicorum demonstrationes ab Apollonio Pergæo prolatas, illi magni Geometræ nomen indidissent, nisi materiam in qua versabatur, Geometricam indicassent?*

Respondeo; aliud est materiam esse geometricam, aliud modum circa illam operandi esse geometricum; omne quantum, materia est geometrica; quia de illo demonstrationes suas facit Geometria; at modus circa illud operandi, ille tantum Geometricus est, qui fit per rectas lineas vel

circulum,

circulum, ob rationes antè assignatas. porro Apollonio, magni nomen Geometræ non idcirco datum est, quia in materia versabatur geometrica, siue quanta, sed quia in illa versabatur Geometricè, siue illo modo, quem stricta Geometria admittit.

Hinc patet problema deliacum iam olim, vt nonnulli volunt, nulla ratione Geometricè solutum esse; sed mechanicè & conicè tantum; prout Auctor oper. Geom. soluit l. 6. prop. 136. item 138. & vniuersaliter ibid. prop. 137.

RESPONSIO II.

Ad R.P. Vincentium Leotaudum S. I.

QVæ contra primam Auctoris quadraturam à R.P. Vincentio Leotaudo, Geometra insigni, allata sunt, ad tria potissimum capita reuocari possunt:

Primo, triplicem adfert sensum in quo mutua rationum continentia, dum dicitur prima ratio toties continet secundam, quoties secunda tertiam, vt adstruere videbatur propos. 44. lib. 10. oper. Geom. sumi & intelligi posset: vel enim significat, primam rationē ita se habere ad secundam, vt secunda se habet ad tertiam; ita vt volens ex duabus rationibus notis, tertiam notam efficere, satisfaciat, exhibendo tertiam rationem proportionalem: vel significat, primam rationem toties per multiplicationem cōtinere secundam, quoties secunda per multiplicationem cōtinet tertiam: vel denique significat, rationes partiales ex quibus constituitur ratio prima totalis, toties esse multiplicatas earum rationum partialium ex quibus constituitur ratio totalis secunda, quoties hæ ipsæ rationes partiales per multiplicationem continent rationes partiales ex quibus constituitur ratio totalis tertia.

Secundo, rejectâ primâ interpretatione de rationibus tribus proportionalibus, secundam amplectitur; & problema, quo *datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties secunda multiplicat tertiam, petitur nota reddi tertia*: ita conatur demonstrare:

Rationes duæ datæ, ad cōmune consequens reuocatæ, sunto rationes A C, B C: inter A & B media proportionalis sit D: dein duabus D & B tertia reperiatur proportionalis F; denique inter B & F media proportionalis inueniatur E, cui commune detur consequens C. *dico rationem E C, eam esse quæ quæritur.*

A	D	B	E	F
C	C	C	C	C

Demonstratio: *quia ex constructione tres antecedentes A, D, B, sunt continuè proportionales, ratio A ad B, duplicata erit rationis D ad B: sed vt D ad B, ita est ex constr. B ad F, ergo ratio A ad B est duplicata rationis B ad F: sed quia ex eadem constructione, tres B, E, F sunt etiam continuè proportionales, erit etiam ratio B ad F, duplicata rationis E ad F, siue B ad E; quare cum rationes A C, B C, E C, quarum idem est consequens C, ita se habeant, vt se habent antecedentes A, B, E, erit prima ratio A C, duplicata secundæ B C, & secunda B C duplicata tertiæ E C. duabus igitur datis rationibus A C, B C, tertiam inuenimus E C, quam toties contineat per multiplicationem secunda B C, quoties per multiplicationem, secundam B C, continet prima ratio A C, quod quærebatur.*

Hâc methodo propofitioni 44. applicatâ, ex notis duabus rationibus, quatuor primorum folidorum notam facit tertiam; determinatque rationem duorum vltimorum folidorum, quæ ex ductu partium parabolicarum in fe fubalternè, nata funt: hinc ad comparationem fectoris, cum triangulo fibi infcripto deuenit: oftenditque illum, hoc minorem effe: quod abfurdum cum fit, concludit primam quadraturam nullam effe.

Tertio, admifsâ tertiâ expofitione, negat illam quidquam ad quadraturam pertinere: quia ex illa partialium rationum æquemultiplicatione, nihil de totalibus inferri poffit: cum illæ non coalefcant in totales per multiplicationem, feu vt æquemultiplicatæ, fed per additionem & fubtractionem.

Hactenus vir eruditus; fed ea quod momentum habeant, reftat vt excutiamus: proquo.

2	4	8	16
A 4	C 12	E 8	G 32
B 2	D 3	F 1	H 2

Nota 1. Si fuerint tres vel plures rationes continuè proportionales A B, C D, E F, G H, affertiones fequentes de illis verificari, præcisè vt funt rationes proportionales, abftrahendo ab illarum terminis: *Prima.* ratio A B, ducta in rationem E F, producit idem, quod ratio C D, ducta in fe ipfam; & A B ratio, ducta in rationem G H, producit idem, quod ratio C D, ducta in rationem E F, *eft 86. lib. de proport. fecunda*: ratio A B, eft ad rationem C D, ficut ratio C D, fe habet ad rationem E F; id eft denominator rationis A B, eft ad denominatorem rationis C D, ficut huius denominator eft ad denominatorem rationis E F. *Tertia*: ratio E F, tam multiplex eft rationis C D, quam hæc, multiplex eft rationis A B: fiue E F toties continet per additionem, rationem C D, quoties hæc per additionē continet rationem A B. *Quarta*: proportio rationis E F ad rationem A B, duplicata eft proportionis, rationis C D, ad rationem A B, & proportio rationis G H, ad rationem A B, triplicata eft proportionis rationis E F, ad rationem C D. *dico abftrahendo ab illarum terminis*, hoc eft confiderando rationes A B, C D, E F, G H purè vt continuè funt proportionales, fiue interim termini illarum v.g. A, C, E G; item B, D, F H fint continuè proportionales, fiue non: quia, quando etiam termini funt continuè proportionales, tunc præter iam dictas proprietates, aliæ illis conueniunt.

A	C	E	G	I
1	2	4	8	16
B	D	F	H	K
1	4	16	64	266

Nota 2. Si fuerint rationes plures continuè proportionales, incipiendo à ratione æqualitatis, v.g. A B, C D, E F, G H, I K, præter antedictas proprietates, illis conuenire fequētes. *Prima*: ratio tertia E ad F, duplicata eft fecundæ C D: quarta G ad H, triplicata eft fecundæ C ad D: *Quinta* I ad K, quadruplicata eft fecundæ C ad D: (*vt demonftrat Auctor oper. Geom. propof. 27. lib. de progreffionibus*) vnde quinta I ad K, duplicata eft tertiæ E ad F, quemadmodum hæc ipfa duplicata eft fecundæ C ad D. *Secunda*: proportio rationis A B ad rationem I K, duplicata eft proportionis, rationis C D ad rationem G H, *eft* 165. *lib.* 8. *oper. Geom. neque requirit vt prima ratio fit æqualitatis. Tertia*: ratio fecunda C ad D, ducta in tertiam E ad F, producit rationem quartam G ad H: *eft* 129. *lib.* 8. *oper. Geom. Quarta* ratio fecunda C D, in fe ducta, producit rationē tertiam E ad F: *eft* 128. *lib.* 8. *oper. Geom.* plures proprietates videre eft eodem libro & loco.

Nota 3.

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
1	1	1	1	1
F	G	H	K	L
M	N	O	P	Q
1	3	9	27	81
1	1	1	1	1
R	S	T	V	X

Nota 3. Si fuerint duæ ſeries rationum æque multarum continuè proportionalium, habentes communem primam rationem æqualitatis, & ſingularum ſerierum termini ſint continuè proportionales, illis competere hanc proprietatem; nimirum ratio vltima E L primæ ſeriei, toties eſt multiplicata rationis ſecundæ B G eiuſdem ſeriei, quoties ratio vltima Q X ſecundæ ſeriei, eſt multiplicata rationis ſecundæ N S, eiuſdem ſeriei. idem eſt de ratione D K, vel C H, reſpectu rationis ſecundæ B G; & de ratione P V, vel O T, reſpectu rationis ſecundæ N S. porro rationem E L, toties, vel tam eſſe multiplicatam rationis B G, quoties, vel quam multiplicata eſt ratio Q X, rationis N S: nil aliud ſignificat, quam quoties ratio B G in ſe ducta, adæquat vel producit rationem E L, toties ratio N S in ſe ducta, adæquat vel producit rationem Q X: vt ſi ratio B G, ter in ſe ducta, producat rationem E L, etiam ratio N S, ter in ſe ducta, producit rationem Q X.

A	C	E
B	D	F

Hinc patet, ſi fuerint tres rationes v. g. A B, C D, E F quibus hæc competat proprietas, vt prima A B toties ſit multiplicata rationis ſecundæ C D, quoties hæc ipſa multiplicata eſt tertiæ E F, patet inquam quid ſignificet primam toties eſſe multiplicatam ſecundæ, quoties hæc multiplicata eſt tertiæ: non aliud enim ſignificat, quam quoties ratio ſecunda C D in ſe ducta, adæquat vel producit primam A B, toties E F tertia in ſe ducta adæquat vel producit ſecundam C D; vt ſi C D quater in ſe ducta producat A B, etiam E F quater in ſe ducta producet rationem C D.

Nota 4. Si fuerint tres rationes continuè proportionales, A B, C D, E F quæcunque ſiue termini ſint etiam continuè proportionales, ſiue non; nunquam illis poſſe competere hanc proprietatem; vt prima toties ſit multiplicata ſecundæ, quoties ſecunda eſt multiplicata tertiæ: & viciſſim, ſi fuerint tres rationes quibus conuenit, primam toties eſſe multiplicatam ſecundæ, quoties ſecunda eſt multiplicata tertiæ, nunquam illas eſſe continuè proportionales. demonſtratum ad lib. 1. huius, cap. 16. & manifeſtum eſt, ex præcedentibus annotationibus his ſuppoſitis.

Reſpondeo ad R. P. Leotaudum & dico 1. certum eſſe, prout ipſemet rectè obſeruat, nunquam Auctorem operis intendiſſe in propoſ. 44. adſtruere, imo nec intendere potuiſſe, tres rationes illas, inter ſolida iſtic determinata, eſſe continuè proportionales: cum reuera tales nec ſint, neque Auctor illas vnquam ſecundum quantitates ſuas, ſed ſemper ſecundum multiplicationem rationum partialium compararit.

Dico 2. nunquam intendiſſe Auctorem aſſerere, totalem rationem duorum primorum ſolidorum, toties multiplicatam eſſe rationis totalis ſecundorum, quoties hæc multiplicata eſt rationis totalis tertiorum; & multo minus ex duabus rationibus notis, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties hæc multiplicat tertiam, voluiſſe tertiam notam facere: huius enim problematis vniuerſaliter propoſiti ſolutio dependet à meſelabio: ſtultum autem foret quadraturam meſelabio implicare, aut illius promittere ſolutionem, & aliam non dare, quam, quæ à meſelabio dependeat: vnde

A	D	B	E	F
C	C	C	C	C

Dico 3: demonstrationem R. P. Leotaudi, quâ ex datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties hæc multiplicat tertiam, conatur tertiam notam reddere, nullo modo subsistere; quod singulas demonstrationis partes examinando, sic ostendo: constructio est huiusmodi: *duæ datæ rationes reuocentur ad commune consequens, sintque rationes A C, B C. tum inter A & B, media ponatur proportionalis D: ipsis autem D, B, tertia apponatur proportionalis F: denique inter B & F, media proportionalis sit E. dico rationem E C, esse illam quæ quæritur.* Demonstratio: *quia ex constructione, tres antecedentes A, D, B sunt continuè proportionales, ratio A ad B, duplicata est rationis D ad B:* verissimum est. *sed vt D ad B, ita ex constructione, est B ad F; ergo ratio A ad B, duplicata est rationis B ad F:* & hoc est verissimum. *sed quia ex eadem constructione, tres B, E, F, sunt etiam continuè proportionales, erit etiam ratio B ad F, duplicata rationis E ad F, siue B ad E:* verum est hoc est. *Quare cum tres rationes A C, B C, E C; quarum idem est consequens C, ita se habeant, vt se habent antecedentes A, B, E;* quod verissimum est, *erit prima ratio A C, duplicata rationis B C, & hæc duplicata rationis E C:* sequela planè nulla; huiusmodi enim est Syllogismus: *ratio A B, duplicata est rationis B F, & hæc duplicata rationis B E: tres insuper rationes A C, B C, E C, sunt inter se vt antecedentes A, B, E. ergo ratio A C, duplicata est rationis B C, & hæc duplicata rationis E C:* quæ forma Syllogismi; quæ connexio præmissarum aut inter se, aut cum conclusione? omnino nulla. vitium in hoc consistit; quod à rationibus comparatis inter se secundum multiplicationem, fiat transitus ad rationes, non easdem, sed alias, comparatas inter se secundum quantitates, seu denominatores suos: & rursus ab his, transiatur ad easdem comparatas inter se secundum multiplicationem.

Porro ex ipsis numeris, quos P. Leotaudus adhibet, manifestè patet error demonstrationis: numeri sunt huiusmodi.

A	D	B	E	F
2816	2730	2648	2607	2568
		C		
		3641		

Si ratio A ad C, duplicata sit rationis B ad C; & hæc duplicata rationis E ad C, prout demonstratio infert; igitur cum rationes illæ commune habeant consequens, necessario B numerus debet esse medius proportionalis inter A & C; & numerus E, medius proportionalis inter B & E: item A in C, debet idem producere, quod B in se; & B in C, idem quod E in seipsum: quorum neutrum verum est, vt numeros examinanti ad oculum patet.

Sed alios assumamus numeros, iuxta constructionem à P. Leotaudo datam, determinatos:

A	D	B	E	F
1	4	16	32	64
		C	G	
		1	256	

Inter A & B, antecedentes rationum datarum, media proportionalis sit D: ipsis vero D & B, tertia inueniatur proportionalis F: denique inter B &

B & F, media proportionalis sit E: assumaturque pro communi consequente C vnitas. patetneque B, inter A & C, neque E, inter B & C, esse mediam proportionalem; quod tamen requiritur, vt ratio A C, duplicata sit rationis B C, & hæc duplicata rationis E C. at ne quis paralogismi causam conijciat in vnitatem C, pro communi consequente assumptam; loco C, ponatur G, quæ tertia sit proportionalis ipsis A, B, tunc quidem ratio A G, duplicata erit rationis B G, sed B G ratio, non erit duplicata rationis E G, cum E non sit media proportionalis inter B & G, sed inter B & F.

Ex his concludo, non solum demonstrationem R. P. Leotaudi non subsistere, sed nec constructionem ipsam, ad rem pertinere, asseroque ex eiusmodi constructione, nunquam intentum obtineri posse.

Porro problema à P. Leotaudo propositum, de ratione duplicata, soluetur, hoc modo. *Sint rationes A B, B C datæ, & A B quidem duplicata sit rationis B C, oportet exhibere rationem tertiam, cuius duplicata sit ratio B C. inter B & C, media inueniatur proportionalis E: dico rationem E C, esse quæ quæritur. cum enim B, E, C, continuè sint proportionales, patet B C rationem duplicatam esse rationis E C,* & hanc esse quæ quæritur.

F E G
A B C

Si vero A B ratio, sit quadruplicata rationis B C, tertia ratio sic exhibebitur: *inter B & C, media inueniatur proportionalis E. Dein inter B & E, media sit F, & inter E & C, media sit G: dico rationem G C, esse quæsitam: cum enim B, F, E, G, C, continuè sint proportionales, ratio B ad C, quadruplicata erit rationis G ad C, adeoque hæc est quæsita.*

Notatu autem dignum est, problema, quo *datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties hæc multiplicat tertiam, petitur exhiberi tertia;* non posse solui independenter à meselabio, nisi quando duæ rationes datæ, sunt in serie proportionalium rationis duplæ: quando v.g. prima est duplicata secundæ, vel quadruplicata, vel octuplicata vel sedecuplicata &c. si enim datæ rationes, in alia proportionalium sint serie, v.g. rationis triplæ, quintuplæ &c. non poterit problema solui, nisi dependenter à meselabio: sit v.g. ratio A B, triplicata ratio B C, oporteatque inuenire tertiam rationem, cuius B C, sit triplicata: inter B & C, duæ ponantur mediæ proportionales E, F; & F C ratio erit quæsita: neque porro aliter soluetur illud problema: atque hæc causa est, cur toties in antecedentibus, dum de problemate hoc vniuersaliter proposito egi, semper dixerim *solutionem* illius *vniuersalem* à meselabio dependere, quamuis in aliquibus casibus particularibus, independenter à meselabio solui possit, vt ostendi in ratione duplicata, quadruplicata &c.

A B E F G

Cum igitur R. P. Leotaudus, ex solutione illius problematis, cuius constructionem & demonstrationem non subsistere ante docui, tertiam exhibuerit rationem, duorum solidorum cylindricorum in propos. 44. lib. 10. quæsitam, & exinde decretoriam in primam quadraturam ferat sententiam, palam est, hanc nullam esse, & illam non modo à R. P. Leotaudo non euersam, sed ne læsam quidem esse.

Quomodo, & quid, ex partialibus rationibus, de totalibus inferri possit, ostendi in scholio ad propos. 46.

RESPONSIO III.

Ad ἘΞΈΤΑΣΙΝ Clariss. D. Christiani Hugenij.

EXplanatis iis, quæ ad primam quadraturam pertinere videbantur, nolui studium hoc meum, aut deesse Tibi Clariss. Domine, aut ab aliis requiri, quibus Auctoris silentium, tacita videri posset erroris confessio: & quamuis ex iis, quæ in præcedentibus à me dicta sunt, facilis sit eorum refutatio, quæ toto cyclometriæ examine perscribis, studio tamen in hunc locum differre placuit, vt totam simul ἐξέτασιν tuam, vna cum responso, non interruptim oculis obiicerem.

Primum igitur pag. 25. *quatuor, inquis, modos proposuit (Auctor) quadrandi circulum; vnum verò eorum, etiam quadratura hyperboles applicauit: quem cæteris potiorem ab ipso existimari, ex multis indiciis colligere licet; vnum est hoc ipsum; quod duas diuersarum figurarum quadraturas, per eundem hunc demonstrarit: alterum, quod euidentior hic sit modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit: & denique hoc maximum est, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, vbi suæ inuentionis historiam & progressum paucis exposuit, nullius modi præter hunc vnum meminerit; potuit & aliam rationem habuisse tres posteriores quadraturas illic silentio prætereundi; eam videlicet, quod quatuor, omnes sciret ex iisdem principiis deductas, & demonstratas esse.*

Falleris Clarissime Domine, & coniecturæ illæ tuæ, quam longissimè à vero distant; sola & vnica ratio præponendi illam, quam circulo simul & hyperbolæ applicuit Auctor fuit propositio 50. quæ, cum cylindrum ad aliud corpus non cylindricum, admirabili reducat modo; adeoque quadraturis omnibus esset fundamentalis, neque sine ordinis perturbatione, aliis inseri posset, primum huic quadraturæ locum dedit. Porro quadraturas omnes ex iisdem principiis deductas, & demonstratas esse, error est longè grauissimus: nam præter reductionem cylindri circularis, ad solidum ex ductu subalterno parabolarum ortum, nil prima cum cæteris commune habet: ratiocinatio in vtrisque, & solidorum, rationumque comparatio, toto differunt cælo. in hac, nullus proportionalitatum vsus; illę, absque earum ope perfici non possunt: in hac, per rationes partiales æquemultiplicatas, nono modo instituitur argumentatio, in illis, nulla multiplicationis mentio.

Pergis deinde: *sed mihi vel alterutra harum considerationum sufficere visa est, vt persuaderet, vnum pro omnibus fore discussionem, quæ quadraturam primariam infirmatura esset, reliquarum agmen ducentem: si enim erratum in ea ostenderimus, quæ minus obscuritatis habet, non video quâ ratione melior successus expectandus sit in tribus sequentibus, quæ maximâ caligine inuoluuntur, quasque auctor ipse vel vni illi postbabere videtur.*

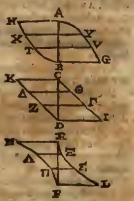
Duplex hic in tam paucis lineis error interuenit; prior in hoc consistit: quod vnam omnibus sufficere discussionem existimes: quî enim discussio vna, sufficere possit omnibus, cum tribus reliquis nil cum prima sit commune? esto (quo nihil minus factum) primam euerterit ἐξέτασις tua, ad reliquas certè non magis illa, quam ad Archimedæam pertinet dimensionem. experire si placet, & ilico iudicium ipse tuum corriges. alter in eo est, quod primam minus habere obscuritatis, sequentes autem maxi-

mâ inuolui putes caligine. at longè aliud de illis censet Auctor, aliud ego dum singulas explano, expertus sum. prima certè plus & tricarum & obscuritatis habet, quam reliquæ simul omnes. in his & clarissima est ratiocinatio & reductio solidorum facilis; in illa nouus per rationes partiales æquemultiplicatas comparandi modus, intricatus est, & solidorum reductio multiplex, varia, ac perdifficilis.

Pag. 26. *vnum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clariß. virum non satis feliciter quædam inuenta in materia proportionalitatum ad quadraturam applicasse; atque hinc meâ opinione ipsi exstitisse erroris causam. primum omnium id in propos. 39. lib. 10. obseruaueram &c.*

Grauis hic rursum occurrit error: neque enim in 39, neque in tota prima quadratura, vllus proportionalitatum vsus. quippe longè aliud est, rationes inter se comparare, secundum æquemultiplicationem illarum rationum, ex quibus iuxta octauam eiusdem lib. 10. constituuntur, aliud per proportionalitates argumentari: lege propos. 39. iuxta Auctoris mentem explicatam, illamque confer cum propos. 3. sequentis libri, cuius demonstratio per proportionalitates instituitur; & ilico discrimen ingês apparebit: & vero qui Auctor potuit inuenta quædam in materia proportionalitatum infeliciusad quadraturam applicasse, cum nec in propos. 12. aut 39. nec in 40. aut 44. nec in 51. aut 52. aut 53. qubus tota prima continetur quadratura, vllam citet aut vllâ vtatur propositione ex libro de proportionalitatibus petitâ? non igitur inde exstitisse Auctori potuit erroris causa.

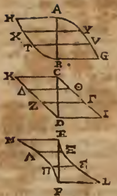
Pag. 27. *eo rem deducam, vt si quidem non impossibile dicet quadraturam suã ad exitum perducere, & per eam reapse inuenire rectilineum circulo æquale, ostendam qui id facillimè imposterum assequatur; deinde vestigia ipsius insistens demonstrabo, quibus hactenus nobis præcessit, iis nequaquam ad optatum finem perueniri posse.*



De modo quem daturum te polliceris quo facillimè imposterum Auctor rectilineum circulo inuenire possit æquale, mox videbo, vbi ad illum deuenero. porro vestigia illius insistendo ad optatum finem deueniri posse hic, & sequentes edocebunt libri.

Quæ sequuntur vsque ad pag. 32. nil aliud continent, præter aliquot Auctoris propositiones.

Pag. 32. *his sic constitutis, sciendum est omnem spem & fundamentum perficiendæ quadraturæ, Clariß. viro in eo positum esse, quod existimet rationem solidi ΗΥ ad solidum ΧΥ (quam vnicam tantum desiderari iam monui) facilè inueniri posse, si cognitæ sint duæ rationes nimirum ratio solidi ΜΞ ad sol. ΔΣ, & ratio sol. ΚΘ ad sol. ΔΓ. sic enim tunc argumentabitur: nota est ratio solidi ΜΞ ad sol. ΔΣ, item ratio solidi ΚΘ ad sol. ΔΓ, ergo notum quoque, quoties illa ratio hanc continet; quoties autem illa hanc continet, toties hæc ipsa continet rationem solidi ΗΥ ad sol. ΧΥ, ergo & hæc nota erit.*



Plane hic ab Auctoris mente deuias, licet enim fundamentum perficiendæ quadraturæ in eo positum sit, vt nota reddatur ratio solidi H Y ad sol. X V, nunquam tamen existimauit Auctor illam facilè inueniri posse, si cognitæ forent duæ rationes, nimirum solidi ΜΞ ad sol. ΛΣ, & sol. ΚΘ ad sol. ΔΓ; has enim antea notas fecerat propos. 43. vnde nec illam quam profers argumentatione instituet, sed eam, quam in scholio ad propos. 40. attuli, quæ toto cælo à tua differt: porro ex datis vel notis duabus rationibus, quarum prima toties per multiplicationem continet secundam, quoties hæc per multiplicationem continet tertiam, velle tertiam vniuersaliter notam facere, idem est atque inter duas datas, quotcũque medias proportionales velle exhibere: stultum autem foret quadraturam me selabio commiscere, ant hoc ad illam perficiendã supponere. non igitur ex duabus notis rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties hæc multiplicat tertiam, sperauit Auctor hanc notam reddere.

Ibid. *si igitur indicauero ipsi, quæ sit ratio solidi* ΜΞ *ad sol.* ΛΣ, *item quæ sit solidi* ΚΘ *ad sol.* ΔΓ, *& ne tum quidem dicere possit, quam rationem habeat solidum HY ad sol. XV, fateatur sanè se frustra vtramque quadraturam tentasse, tum circuli tum hyperboles.*

Supersedere, mihi crede, labori isti poteras; rationem enim solidi ΜΞ ad sol. ΛΣ, item solidi ΚΘ ad sol. ΔΓ, notam habuit, aliisque & Romæ & in Belgio demonstrauit Auctor, pluribus annis antea, quam tu vita & luce fruereris: lege propos. 43. lib. 10. quæ vtramque rationem notam facit; nil igitur opus erat illam Auctori indicare, ex quo solo notitiam illius hausisti.

Sin vero datis istis duabus rationibus, inuenire post hac potuerit rationem solidi HY ad sol. XV, tum se credat circulum reuera quadrasse.

Hic ille modus est circulum facillimè ad quadrum reducendi, quem pag. 27. daturum te auctori pollicitus es: Quæso te Clariss. Domine, vnde habes, notã ratione solidi H Y ad sol. X V, quadraturam absolui? non aliundè certè quam ex Auctore, neque id, si velis, diffiteri potes: vt quid igitur, acsi hunc ignoraret is à quo solo didicisti, quadraturæ modum præscribis? cum illa scriberes, optassem meminisse te, quid, & cui scriberes.

Dicam autem nunc ipsas rationes: & primam quidem, hoc est rationem solidi ΜΞ *ad sol.* ΛΣ, *aio esse eandem quæ numeri 53 ad 203. alteram vero rationem solidi* ΚΘ *ad sol.* ΔΓ, *eam quæ 5 ad 11. atque horum vtrumque infra sum demonstraturus & consequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, quoties ratio harum prima, contineat secundam, hoc est quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. sed enim quo sensu verbum continere hic explicaturus est? &c.*

Rationem solidi ΜΞ ad sol. ΛΣ eandem esse quæ numeri 53. ad 203. & alteram solidi ΚΘ ad sol. ΔΓ, eam quæ 5. ad 11. nil habeo quod opponam, cum vtrumque rectè demonstratum sit: quoties autem ratio prima

ma per multiplicationem contineat secundam, definitum est in schol. ad propos. 40. ex solis Auctoris principiis: quo autem sensu verbum *contine-re* explicaturus sit, vide idem scholiũ & propos. 39. 40. ante explicatas. vnde à vero alienum est, quod pag. 37. asseritur, aliam interpretationem verbi *continere*, præter duas à Te allatas, nullam in oper. Geom. exhiberi. & vero miror, interpretationem illam à Te perceptam non esse, cum ex prop. 12. q̃ næ octauæ innititur, facilè intelligi potuerit, additâ præsertim explicatione P. Sarassæ coroll. 9. confirmationum quadraturæ, qui liber deesse Tibi non poterat, in tanta locorum vicinitate, cum duobus annis ante tuum prodierit.

Pag. 37. *non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio solidi* ΜΞ *ad sol.* ΑΣ, *contineat rationem sol.* ΚΘ *ad sol.* ΔΓ, *ac proinde nec determinari poterit, quoties hac ratio contineat rationem solidi HY ad solidum XV: quare liquet hanc rationem ne duabus quidem prioribus datis, per inuenta Clariss. viri cognosci posse, adeoque frustra ipsum sperasse hoc modo perficere circuli quadraturam.*

Hic error commissus est palmaris, qui etiam in Auctoris doctrina peregrinum Te ostendit: siue enim verbum *continere* sumas in sensu ab Auctore intento & ante à me explicato, siue per illud intelligas *continentiam per multiplicationem*, vtrumque determinandi modum, abunde docuit vt ostensum in schol. ad propos. 40. lib. 10. oper. Geom. vnde tertia illa ratio per inuenta Auctoris nota fieri potuit, adeoque non frustra hâc viâ sperauit circuli quadraturam perficere.

Restat nunc tantum vt manifesta faciam, quæ in præcedentibus posita fuere. dixi enim me demonstraturum, quod solidum ΜΞ *esset ad sol.* ΑΣ, *vt 53 ad 203, item quod solidum* ΚΘ, *rationem haberet ad solidum* ΔΓ, *quam 5 ad 11. quoniam autem ad horum primi demonstrationem necessarium est, vt notum habeamus, quæ sit ratio vngulæ parabolicæ ad cylindrum suum, idcirco hanc rationem declarantes, tractatum Clar. viri quem de eadem vngula proposuit, vno egregio Theoremate auctiorem reddemus; quod miror ipsum non inuenisse, cum ex iis quæ iam ostenderat facili negotio deducatur.*

Falleris Clariss. Domine, Theorema illud & vidit & inuenit Auctor iam à triginta & quod excedit, annis: sed quia tam nullo negotio ex iis quæ demonstrarat deduci poterat, corollario illud, non propositione dignatus est. Inspice corollarium propos. 99. lib. 9. oper. Geom. in quo hæc verba leges: *Hinc manifesta est ratio dignoscendi proportionem inter vngulam parabolicam & cylindrum, qui vngulam continet; vel inter vngulam & residuum cylindri* &c. atque hoc miror valdè, aut non legisse Te aut si legeris dissimulasse.

Cæterum cum toto Cyclometriæ examine nil aliud egeris, quam ostendere quod ex notis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties hæc multiplicat tertiam, per auctoris inuenta, quæ primæ adhibuit quadraturæ, tertia non innotescat, Auctor vero toto cælo diuersâ incedat viâ, adeoque ex duabus notis rationibus æquimultiplicatis, nullo modo intenderit tertiam notam facere, quia illius solutio dependet à meselabio, manifestum est ἐξέτασιν tuam, non solum primam Auctoris quadraturam non euertere, sed illam ne quidem impetere.

Laude tamen dignus est conatus tuus, *quo licet maiori diligentia quam successu rem arduam tentaueris*, non exiguum est tot inter eximios hoc æuo

geometras, Te ptimos inter, hanc Tibl prouinciam delegiſſe. quod rurſus ſtudium, adhiberesi vacet, & Auctorem & me nouo affeceris beneficio.

RESPONSIO IV.

Ad Cenſuram Merſennij.

QVamquam Merſenni Cenſura,eiuſmodi mihi ſemper viſa ſit, quæ, non dico refelli ſcripto, ſed ne legi quidem à doctis mereatur, tum quod prorſus ſit ageometrica, & in omnibus, hoc eſt ſingulis ſui partibus apertè falſa, tum quod in pleriſque auctori iniurioſa; Eandem tamen,vt doctiſſimam & verè geometricam, quia toties obtrudit Cenſor,illamque vt talem, etiam approbet notus ille toti orbi Geometra Æ.R. lubuit ſingulas illius partes examini ſubiicere, & communi Geometrarum omnium iudicio committere. quod dum ago, nulla à me defuncto pridem Merſennio lis indicitur;cum Cenſore,cum noto illo Merſennij Geometra (qui cenſuræ illius hæredes, vel vt nonnulli ſuſpicantur auctores ſunt) tota mihi res erit:quieſcat ille,& quâ frui cæpit, æternum frui pergat felicitate.

Cenſura Merſennij.

A noſtris autem phænomenis editis, conatus ingens in inuenienda circuli quadratura, labore improbo impenſus eſt, & decem libris explicatus.

QVod felix fauſtumque ſit, ingentes P. Gregorij labores, faſtis tandem inſcripti ſunt;& quidem eiuſmodi faſtis, quos non facilè ipſamet expunxerit inuidia: *à phænomenis noſtris editis*, hoc eſt ab anno 1644, quadratura vrgeri cæpit. attendite quotquot eſtis, toto orbe chronologi, & ne cui res tanta fortè excidat, aut vario annorum computu obſcuretur, à phænomenis Merſennij editis, annorum ſeriem ducite. firmatam habetis Epochatum radicem; valeât poſt hac olympiades &c. intricata Chronologorum ſtudia,à Merſennianis phænomenis, expediti deinceps inſcribentur faſti.

At dicite,amabo, Cenſores,creditiſne fieri poſſe, vt à phænomenis Merſennij editis,hoc eſt ab anno 1644, ad annum vſque 1646, quo quadratura imprimi cæpta eſt,duorum ſcilicet annorum ſpatio, tantũ opus, quo duo ferè propoſitionum millia continentur,contexi,tantamque veritatum multitudinem, tantam materiarum diuerſitatem inueniri, demonſtrari, imo vel exarari aliquoties antequam prælo committerentur, ab homine ſenectute ipsâ impedito potuiſſe? ego certè non credo, nec vllus credet geometra. neque ſanè minori tempore opus tale peruolui accuratè poſſe ſat ſcio. accuratè inquam, præſertim ab iis qui Cenſores,agere cum decreuiſſent,non leui oculo librum percurrere, nec ſumma ſparſim capita delibare tantum debuiſſent, cum de toto opere iudicium ferant. aliud vero Cenſuræ Auctores feciſſe non facilè adducar

vt credam. præfationem operis inſpicite, atque à triginta & quod excurrit annis, peruigili ſtudio illi ſe inſudaſſe Auctorem ipſum candidè fateri comperietis: non igitur à Merſennianis phænomenis, hoc eſt ab anno 1644, conatus ingens in inuenienda circuli quadratura, labore improbo, impendi cœpit, ſed à triginta & quod excurrit annis: quid igitur hæc Cenſuræ vult ſententia? an quo anno phænomena Merſenni eodem, Auctoris opus prælo ſubiectum ſit? at falſum id eſſe ex prima operis fronte, prælique adſcripto anno 1646, patet. an Merſennianis igitur phœnomenis, & circuli dimenſioni, quid commune eſt, vt inde tanti operis ſuſcipiendi arreptam fortè anſam ſuſpicemini? at illorum initio nil aliud promitti video, præter *amuſſim, libellam, perpendiculum, runcinas, terebras, ralla & vrpices, quibus occatur, liratur, porcaque tranſuersâ deriuantur vligines in collicias* &c. his adde Mechanica phænomena, Acontiſmologica, Harmonica; quid his cum circuli quadratura commune, quid affine? edocete quæſo, ſi quid occurrat, dum ad alia cenſuræ phænomena feſtino.

Quo propertionalitates nouo modo deducuntur, quippe non ſolas rationes ſimiles, ſed etiam diſſimiles inter ſe comparet.

DEcem, inquit, *libris explicatus*, improbus ſcilicet labor, *quo proportionalitates nouo modo deducuntur*: an igitur aliud nihil totis decem libris explicatum cenſetis? tam leui oculo vaſtum illud Auctoris opus percurriſtis, vt ea quæ paſſim occurrunt præclariſſima inuenta, quæque antiquitati nihil cedunt, non aduerteritis? nihil actum putatis, cum progreſſiones Geometricæ in infinitum excurrentes, ad geometricum reductæ ſunt rigorem, terminiſque incluſæ? nihil, cum ex vario planorum in plana ductu, noua omnis generis effinguntur corpora, explanantur, reducuntur, cubantur? nihil, cum vngulæ ſeu ſegmenti cylindrici cubationem, imo & ſuperficiei tam exoticæ, vt quæ tota ſemicirculo elipſique clauditur, aream quadrando determinat? nihil, cum eiuſdem vngulæ cum ſphæra ſymmetriam & omnimodam concordiam primus exponit? nihil, cum ſphæroidium, Conoidium parabolicorum, hyperbolicorumque proprietates admirandas plane aperit ac demonſtrat? nihil, cum tam variis expeditiſque modis parabolam quadrat, imo & hyperbolam intactam hactenus indomitamque? nihil cum iucundiſſimas abſtruſiſſimaſque conorum & conicarum ſectionum proprietates, tribus omnino libris per octingentas & quod ſuperat propoſitiones, inuenit, deducit, demonſtrat? nihil, cum ſtupendam illam parabolæ cum ſpirali Archimedæa ſymbolizationem expreſſit, explanauit? hæc ſi per vos ne nominari quidem merebantur, parum laboramus; Geometras habet orbis, habet & Gallia, quos conſtat agnoſcere non inuitos, quantum Auctori tota debeat Geometria. omnis certè illum mirabitur retro poſteritas, gratulabiturque huic æuo, talem tuliſſe geometram, quem antiquitas, etiam non datâ quadraturâ, ſuum vellet.

Sed agite porro; quid id eſt quod proportionalitates nouo tantum modo deductas pronuncietis? an apud vllum hactenus, vllo eas modo demonſtratiuè deductas conſpexiſtis? Auctores afferte, & vltro cedimus. ſcio equidem complures de rationum additione, multiplicatione,

compositione, diuisione perfecisse; sed & illud non ignoro, eosdem non nisi de rationibus rationalibus tractasse, atque ita quidem, vt compositionem rationum ab earundem additione non distinguant, confundantque operationes specie differentes, atque adeo summam in geometriam confusionem inuexerint, vt libro I. demonstratum est: qui vero de rationibus scripserit dissimilibus, qui earundem operationes specie distinxerit, singulasque demonstrarit, præter Auctorem operis Geom. certus scio esse neminem.

At vero cum neque dederit quadraturam eo modo quo solet à geometris expectari.

DEdit igitur quadraturam eo modo, quo non expectabant dandam Geometræ: assurgite quotquot estis geometræ, Auctorique plenis vocibus congratulamini; gratias ei agat ipsamet Geometria, id namque quod hactenus datum est nemini, perfecit hic, quadraturam dedit; & ne parum ageret, eo quidem modo dedit, ipso Censuræ testimonio, qui cum à Geometra nullo expectaretur, nouitate sua duplicauit beneficium.

Quæro tamen, cum neque dederit quadraturam Auctor eo modo quo à Geometris solet expectari, agite & Auctorem edocete, quo soleat quadratura à Geometris expectari modo: nimirum hoc ignorat ille, qui ætatem in Geometricis triuit, ignoramus & nos, & à Mersennio, atque à vobis præcepta capimus. pergite porro: quadraturam dedit Auctor, sed non eo modo quo solet à Geometris expectari: at modus ille quo quadraturam dedit, Geometricus est nec ne? si est: eo igitur modo quadraturam dedit quo solet à Geometris expectari, nimirum geometrico. sin autem, de hoc rursum quæro, quâ de causâ Geometricus non sit? quid siletis? cur nulla dicti adfertur ratio? si quid conicam inter & Geometricam problematis solutionem intersit non rectè fortassis percipiatis, legite si placet ea quæ lib. primo in hanc rem à nobis perscripta sunt, & ilico cessabit quæstio. sed audio:

Cum in ea exhibenda longè quam ipsam quadraturam difficiliora supponat vel postulet.

NOn dedit igitur eo modo quadraturam Auctor, quo solet à geometris expectari, quia in ea exhibenda longè quam ipsam quadraturam difficiliora supponit vel postulat. palmaris hæc impostura est, tantoque grauior, quanto impudentius est ea in re fidem fallere, in qua à quouis mendacij argui possis. aio igitur in toto Auctoris opere, hoc est libris omnino decem, ne nomen quidem suppositi aut postulati vel semel legi; agite & mecum singulos scrutamini diligenter; eccum vobis primum & tertium: circularem hic Geometriam, linearem ille continet, lemmaticus est vterque, & totus Euclidæus; ideoque nec definitionibus quidem eguere, quid in his suppositi, quid postulati venit nomine? omnino nihil.

Ad secundū de progressionibus, qui medius inter hos interiacet, pergamus.

mus. nomen inusitatum præfefert, ac definitiones omnino tres præmittir. sed videte, obsecro, numquid postulenr aut supponant: loquendi modum in re noua explanare eas tantum audio, exponereque quid Auctor, Geometricæ seriei, quid progressionnm, quid denique termini progressionis nomine intelligat: hoccine est supponere aliqua, aut postulare ipsâ quadraturâ difficiliora quæ sunt?

Ensequentes tres; qui ordine quartum, quintum & sextum constituunt, quid in his supponitur, quid postularur, non dico ipsâ quadraturâ difficilius, sed quid vel speciem suppositi aut postulati habet? definitiones aliquæ elipseos, parabolæ, & hyperbolæ, leguntur; cætera omnia demonstratiuè sunt deducta: at illæ ex Archimede, Apolloniοque petitæ cum sint, nihil inusitatum afferunt, quadraturâque difficilius quod sit.

Ad septimum abeamus, qui de ductibus planorum in plana inscribitur, peregrinus is est, torusque in vngularum inuolucris, ac solida secum trahit immania: at plana hic rursum omnia, atque vt iter scabrosum alias, complanaret magis, tribus illud definitionibus, qui loquendi modum explicent, exæquat: nihil igitur plano illi supponitur, nihil postulatur.

In octauo, qui de proportionalitatibus est, quatuor recepta ponuntur principia: primnm, *finiti ad finitum in eadem specie quantitatis est proportio.* secundum, *datis tribus vel pluribus quantitatibus, ratio prima ad vltimam, componitur ex rationibus mediarum*: tertium, *rationes quæ ex iisdem rationibus componuntur sunt eædem*: quartum & vltimnm, *quantitas rationis siue denominator, ductus in consequentem terminum rationis, producit antecedentem*: primum lumine naturæ notum est: secundum & tertium, Euclidæa sunt, quartum denique ab Eutochio, Theone, Vitellione, aliisque geometris omnibus assumptum est & à pluribus demonstratum: quid in his supponitur, quid postulatur ipsâ quadraturâ difficilius?

In nono, duæ omnino sunt definitiones; quarum prior, quæ cylindri portio, vocetur ab Auctore vngula; posterior, quid vngularis inuolucri veniat nomine, definit. In decimo, nequidem vlla ponitur definitio. vbi igitur supposita illa, vbi postulata, quadraturâ ipsâ difficiliora quæ sint? acutùm profectò videtis, qui postulata, & supposita, quæ nusquam sunt videtis.

Neque meminerit vllatenus Geometriæ per indiuisibilia Eruditiss. Bonauent. Caualleri, quandoquidem primus illam per indiuisibilia methodum edidit, quæ tamen illi præluxisse videtur.

AT neque Eruditissimi Vietæ meminit, neque doctissimi Mydorgij, Clarissimique Gassendi, aut Cartesij etiam eruditissimi, neque adeo etiam Mersennij, aut illius quem suum vocat Geometræ vsquam meminit: quid deinde? at Cauallerius ipsi præluxisse videtur, non præluxerunt cæteri: Mersennij certè phœnomina non minus Auctori, quam Caualleri indiuisibilia, ad tantam rem aggrediendam præluxerunt; cur huius causa suscipitur, illius vero non item?

Sed agite, quâ ratione probatis Geometriam per indiuisibilia Caualleri, Auctori præluxisse? quia nempe Cauallerius primus illam per indiuisibilia

uisibilia methodum edidit:esto, quid inde sequitur? an Auctor in toto vspiam opere per indiuisibilia procedit? ne vos homines minimè sitis mali id si opinamini: at dicite amabo, in quo libro demonstrationibus suis, illam per indiuisibilia methodum adhibet? in septimo vtique, vbi ex ductu planorum in plana, noua effinguntur corpora. capio: methodus igitur illa Cauallerij per indiuisibilia, cum Auctoris ductibus coincidit; & duo illa, res vobis vna eademque sunt: illa, additione infinitorum indiuisibilium vt sic, perficitur; hæc, ductum rectangulorum in inuicem verè geometricum, seu multiplicationem continet: illa, ab vna specie quantitatis ad aliam nec geometricè nec demonstratiuè procedit; hæc, Geometricâ, vereque Archimedæâ perficitur exhaustione; illa falsa, nisi alio reducatur, vt à pluribus ostensum est; hæc, exploratæ veritatis est, probatisque innititur antiquorum principiis; nil igitur Auctoris ductibus cum illa Cauallerij per indiuisibilia methodo, commune, imo nec affine.

Sed aliud iam contendo: esto, quod falsum est, Caualerianam methodum in aliquo cum Auctoris ductibus conuenire; quî inde conficitur, illum huic præluxisse? sequelam hanc, ipse negarit Caualerius. obiecerat huic Guldinus, illum suam per indiuisibilia methodum, à Kepplero, ac Souero mutuasse, propter magnam cōuenientiam ac similitudinem principiorum; quâ admissâ, rectè tamen negat Caualerius inde sequi, methodum suam ab illis mutuatam esse: legite si placet, cap. 2. exercitationis tertiæ; vlterius procedo & dico, Geometriam Caualerij, ante opus Geometricum editum, nunquam ab Auctore lectam, imo nec conspectam fuisse, id Auctor ipse, id è nostris plures, qui per annos multos illius auditores fuere domestici, quâ possunt fide & religione testantur: sed illam ante viderit, & legerit Auctor, quam opus suum ederet, an idcirco illa huic præluxit? illa edita est anno 1635. at ductus suos composuit Auctor, anno 1621. & biennio post, Romam censendos misit Patri Grimbergero, illustri tunc Geometræ, cuius rei testes ipsius Grimbergeri litteræ, & grauissimi adhuc superfunt viri: testis item est P. Gulielmus Boelmans, Auctoris quoque domesticus auditor, ac multis deinceps annis matheseos professor, qui in libello Thesium, anno 1634. edito, inter alia, parabolam ex Auctoris ductibus quadrauit: non igitur Auctori prælucere potuit Cauallerij methodus, quæ tot annis posterior nata est, & tam immensum ab illius ductibus recedit, adeoque nec illius vllâ ratione meminisse debuit.

Nostris Geometris displicuit.

MAgnum crimen, lectores, scelus inauditum: Auctor alio modo quadraturam dedit, quam dandam expectabant Geometræ, Auctor non meminit Geometriæ Caualerij, reus igitur est, & Geometris Galliæ displicuit: at, quinam illi sint Geometræ, quibus Auctoris opus, ob duas illas in censura allatas rationes, displicuit? ætatem habent, & calamum, cur iudicium ipsi suum non produnt? quid alieno loquuntur ore? non tam malè in Galliis cum Geometria agitur, vt geometricum iudicium, de re geometrica fieri quî debeat, ignorent; seque fecisse satis putent, si temerè, nullâque additâ demonstratione, pronuntient, *nostris Geometris displicuit*. certè, Clarissimo Pellio non satis fuisset iactitare, Longomontani quadraturam displicuisse Geometris: neque Eruditissimus Gassendus, aut doctissimus

ctissimus Mydorgius, quidquam sese effecisse existimassent, si Mathematicarum recreationum libellum vnus, nouos alter Reytæ circa Iouem errones, displicuisse sibi, alisque acri supercilio pronuntiassent: aliam illi longè ingressi sunt viam; neque crediderim mutatâ repentè voluntate, scribendique consuetudine, eos absque demonstratione vlla, ad diiudicandum opus subtilissimum, voluisse prosilire, aut tam imperitæ subscribere censuræ.

Qui præterea, nonnihil in illo opere requirunt, vel arguunt: idque præsertim, quod cum opus suum quadratura circuli, specioso superboque titulo insignierit.

VEl Auctor quadraturam dedit, vel non; si prius, qui potuit modestioribus opus suum verbis inscribere? si posterius, id non temerè asseri, sed geometricè à vobis demonstrari debuit priusquam libri titulus in inuidiam vocari: possem & ego de Mersenni titulis, verbisque quibus opera sua commendat, non pauca queri & arguere, sed res mihi tanti non est; quod tamen gratis asserere ne videar, non pigebit hic, verba epistolæ nuncupatoriæ, quam mechanicis suis præfigit, apponere. *Regulam, circinum, amussim, libellam & perpendiculum Architectis & Latomis. Fabris lignariis, runcinam, terebras, serras. Agricolis, stiuam, rallum & vrpices, quibus occent, lirent, porrâque transuersâ deriuent vligines in collicias. Tritoribus, flagella, tribulasque; Pistillos rudiò pilo crimnum facientes, molasque trusatiles, cum melis & catillis emolitoribus. Pistoribus, mactras ac sphatas, vinitoribus, bidentes, radicas, orcas, prala, lacus, serias, siphones & epistomia. Fænisecis, demetientes, falces Dentesque feculas. Casses & varos venatoribus. Piscatoribus, verruculum, tragulam, sagenam, hamum; Aucupibus, illices, amitos, decipulas, pedicas, caueas, Equitibus, ephippia, stapetes, calcaria, frana, pastomides. Aurigis, petorita, esseda, cilia, serraca, trahas, lecticas, sufflamina, succulas. Naucleris, clauum, ancharam, vela, bolidem antlias tribuit. quid opificia reliqua percurram, quæ huic arti sua instrumenta penitus accepta ferunt? vt ne quidem cibum probè coctum, absque lebetibus, verubus, craticulis, sartaginibus, trullis, fuscinis, rutabilis, batillis, tripodibus, radulis. truis, & paropsidibus commodè satis parare valeamus.* &c.

Hæc ego cum legerem, dolebam Calepinum aut Nomenclatorem mihi ad manum non esse; quos à Mersenno ad artis suæ commendationem descriptos videbam. cum vero lebetes, trullas, sartagines, in medium proferri conspicerem, credebam non abs re, nouam comædiam institui, cui Ollulariæ aut Patellariæ nomen Plautus imponeret: vereor interim ne sutoribus, aliisque eius farinæ hominibus, quod artis suæ instrumenta omiserit, bilem moueat, præsertim cum ex Nomenclatore, eodem labore non inconcinnè describi possent.

Nihil tamen quod ad rem faciat, præter id quod in ea re hactenus inuentum, protulerit.

ANne & vos Censores, qui doctissimam & verè Geometricam Mersenni dicitis censuram, nihil ab Auctore quod ad rem faciat, præter id, quod ea in re hactenus inuentum est, prolatum existimatis? non ita, vt opinor, desipitis: quæro tamen ex vobis; quis antè, aut præter Auctorem,

progreſſiones geometricas in infinitum excurrentes, certis determinatis limitibus, illarumque terminos exhibuerit? quis ſphæram ad corpus non ſphæricum, ad portionem nimirum cylindricam, quam vngulam vocat, antè vel præter Auctorem reduxerit? quis vngulas cylindricas, circularem & parabolicam, antè illum cubauit? quis cylindro circulari, æquale dedit corpus non cylindricum? quis geometricè curuilinea circularia cum rectilineis comparauit? quis diſſimilibus rationibus perinde ac ſimilibus geometriam vti docuit? atque his omnibus cum viam ſibi ad quadraturas ſternat, nihil ne quod ad rem faciat, præter id quod ea in re hactenus inuentum eſt, protuliſſe videri poteſt? addo, quod in ſolo libro de ductibus, & plura & ſubtiliora in ordine ad quadraturas inuenta dederit, quam ab omnibus ſimul geometris, hactenus allata ſint. plura dicere ſuperſedeo, quia opus ipſum vel leniter inſpectum, Cenſuræ calumniam ſatis per ſe diluit.

V

Quippe in illud abit necdum ſolutum problema, quodque forſan longè difficiliorem, quam ipſa quadratura ſolutionem requirit, datis tribus magnitudinibus &c. datiſque duarū ex illis Logarithmis, tertiæ Logarithmum Geometricè inuenire.

NIhil igitur Auctor ad rem quod faciat, præter id, quod ea in re hactenus inuentum eſt, protulit, quia in illud abit necdum ſolutum problema, *datis tribus magnitudinibus* &c. quæ inſolens hæc ratiocinatio, quæ concluſio? conſtat nimirum ſibi, & ſui vbique ſimilis eſt cenſura; quæ malè à phœnomenis auſpicata, peius deducta, finit vtique peſſimè. porro Auctorem in illud abire problema, manifeſtè falſum eſſe oſtendi in reſponſione prima ad Cenſorem.

Indicet nunc Cenſor, & notus ille toti orbi Merſennij Geometra, quā docta & verè geometrica hæc ſit cenſura.

APPENDIX

Ad Danielem Lipſtorpium Lubecenſem.

PRodijt anno 1653 liber, cui titulus *ſpecimina philoſophiæ Carteſianæ*: Auctore Daniele Lipſtorpio Lubecenſi: quem dum animi causâ, hinc inde peruoluo (neque enim tempus Geometricis debitum, eiuſmodi ſtudijs, ac libris inutilibus vacat, aut lubet impendere) commodum incidi in loca quædam, vbi tum Carteſij, tum ſuum de quadraturæ poſſibilitate iudicium declarat: & illius quidem ſententiam, his verbis exponit: *illud autem in primis ipſe* (nimirum Carteſio) *ſuſpiciendum, quod ſolerti ingenij acumine, ſine difficultate potuerit determinare, quid humano ingenio peruium eſſet, quid non: an problema aliquod poſſibile eſſet, an minus. itaque problema illud adeo vexatum, de circuli quadratura, nunquam aggreſſus eſt; nouerat enim eſſe illud iſtis poſſibilitatibus circumuallatum, vt operam & oleum perderet, quicunque illius ſolutioni ſtuderet: nec vnidunus impeteratus prolixo Gregorij à S. Vincentio volumini, vnicam in euerroris montem, ex quo reliqui omnes promanarunt, notauit.* Hæc ille.

Duo in hac sententia afferuntur: primum quidem, idcirco Cartesium problema illud adeo vexatum de circuli quadratura, nunquam aggressum esse, quod nosset, illud istis positionibus circumuallatum, vt operam & oleum perderet, quicunque illius solutioni studeret, hoc est, quia censebat humano ingenio quadraturæ solutionem esse impossibilem. alterū, Cartesium non triduum prolixo Auctoris volumini immoratum, vnicum in eo fontem, ex quo reliqui errores promanarint omnes, notasse.

Quadraturæ solutionem, quod nunquam aggressus sit Cartesius, benè meo iudicio fecit: non quia illam humano ingenio impossibilem iudicarit, sed quia algebræ suæ terminos ac limites probe noscens, illam tam sublimis problematis solutioni imparem videret; communi autem geometriâ idem perficere se posse desperaret.

Quam infeliciter autem, solerti suo mentis acumine, sine difficultate determinarit, circuli Dimensionem humano ingenio imperuiam esse, præsens hic, & sequentes edocebunt libri: porro in cæteris, humano ingenio peruia, an sint, nec ne, determinandis, æque atque in hoc infelix si fuerit, videat Lipstorpius quâ fide ea de Cartesio scripserit, quæ paulo ante recensui.

Ad alteram sententiæ partem quod attinet; miror vnicum illum errorum fontem, à Cartesio, tridui spatio in prolixo Auctoris opere detectum, aut nulli ab eo indicatum, aut si quibusdam communicarit, ab horum nullo per se, aut per alios Auctori obiectum fuisse; præsertim cum ab auctoritate Cartesij (quæ apud illos pæne supra humanam est) non leue momentum res ea habitura fuisset. si cui autem errorum illum fontem à Cartesio detectum Auctori indicare placuerit, polliceor non tridui, sed vel vnius diei, & forsan horæ spatio ostensurum me, quæcunque illa sint, aut planè esse erronea, aut ex mente Auctoris perperam intellecta, dimanasse.

Cartesij opinionem, in eiusdem verba iurare doctus, sequitur Lipstorpius, & circuli dimensionem censet impossibilem; quia vero assertionis suæ rationes vel tum ad manus non habebat, (contentus Cartesij auctoritate) vel illis diffidebat, alio loco & tempore, eas se prolaturum pollicetur. verum priusquam illas in medium adducat, (quod vehementer opto, & auidè expecto) admonitum illum velim, nihil in hoc argumento perfecturum se, nisi geometricam impossibilitatis attulerit demonstrationem: quam si dederit, præstabit aliquid, quod ante illum nemo: porro philosophicas rationes, & nescio quas congruentias, adferre, dum de re geometrica pronuntiandum, ineptum planè & absurdum est.

LIBRI SECVNDI FINIS.

ELENCHVS MATERIARVM LIBRI SECVNDI

DE PRIMA CIRCVLI QVADRATVRA.

PARS I. *Exponit propositiones, quæ à nonnullis in dubium vocatæ, occasionem dedere, quadraturam circuli primam vitij arguendi.*

PARS II. *Variorum respondet obiectionibus.*

RESPONSIO I. *Ad Censorem A A, an prima circuli quadratura, abiat in illud Mersennij problema*, datis tribus quantitatibus &c.

DIGRESSIO, *De triplici problematum solutione, Mechanica, Conica, Geometrica.*

RESPONSIO II. *Ad R. P. Vincentium Leotaudum, S. I.*

RESPONSIO III. *Ad Clariss. virum Christianum Hugenium.*

RESPONSIO IV. *Ad Censuram Mersennij.*

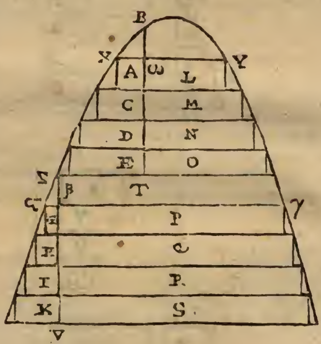
APPENDIX *Ad Danielem Lipstorpium.*

SECVNDA CIRCVLI QVADRATVRA.

PARS PRIMA.

Comparantur ſolida quædam, ex ductu partium parabolicarum in ſe ipſas ordinatè orta, cùm totidem aliis, ex ductu earundem partium in ſe ſubalternè, natis.

PROPOSITIO I.



SInt B T, ZV diametri quæcunque æquales, in parabola Z B Y: quibus diuiſis in æquè multas partes æquales, agantur per diuiſionũ puncta normales, cõpleanturque rectangula, quæ ſingula in ſe ipſa ducta, intelligantur exhibere paralelopipeda A. C. D. E. G.H.I.K.L.M.N.O.P. Q R.S.

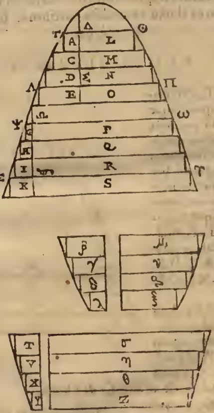
Dico paralelop. A, ad paral. G, eandem obtinere rationem, quam habet paral. P, ad paral. L: item par. C, eſſe ad par. H, vt paral. Q, eſt ad M: & ſic de reliquis.

PEr 45 de paral. rectangulum xωy, æquatur rectangulo αβγ: igitur vt xω ad αβ, ita βγ ad ωy: & vt quadratum xω, ad quadr. αβ, ita quad. βγ, ad quadr. ωy: ſuntautem quadrata hæc, baſes paralelopip. A, G, P, L: igitur, cum altitudines vtrobique ſint æquales, paral. A eſt ad G, vt paral. P, eſt ad L: ſimiliter oſtendã, C eſſe ad H, vt Q eſt ad M; & ſic de reliquis. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc sequitur, proportionem rationis A ad G, ad rationem P ad L, eandem esse cum proportione rationis C ad H, ad rationem Q ad M; & permutando, proportionem rationis A ad G, ad rationem C ad H, eandem esse, cum proportione rationis P ad L, ad rationem Q ad M; & sic de cæteris.

PROPOSITIO II.



SInt eadem omnia quæ prius: pars autem parabolæ, cui inscripta sunt rectangula A, C, D, E, subalternè posita, sit

βγδλ;

βγδλ; & pars LMNO ſubalternè, ſit μνξξ. pars verò GHIK ſubalternè ſit TVXY: denique pars PQRS ſubalternè, ſit σηθz.

Dico, paralelop. ex ductu rectanguli A in β, ad paral. ex G in T, eandem habere rationem, quam habet paral. ex P in σ, ad paral. ex L in μ: & ſic de reliquis.

PRoductum ex rectangulo A in β, idem eſt cum producto ex A in E, (figuræ enim β & E, eædē ſunt,) ſed ſolidi ex A in E, baſis eſt rectangulum ſuper ΓΔ, & ΛΣ, ergo idem quoque baſis eſt, ſolidi ex A in β. ſimiliter producti ex G in T, baſis eſt rectangulum ſuper ΨΩ & Ξϖ, & producti ex P in σ, baſis eſt rectangulum ſuper Ωω & ϖΥ: denique producti ex L in μ, baſis eſt rectangulum ſuper ΔΘ & ΣΠ: quia vero per 45 de parab. rectangula ΓΔΘ, ΨΩω ſunt æqualia, erit vt ΓΔ ad ΨΩ, ita Ωω ad ΔΘ. ſimiliter vt ΛΣ ad Ξϖ, ita ϖΥ ad ΣΠ: igitur ratio compoſita, ex ΓΔ ad ΨΩ, & ex ΛΣ ad Ξϖ, æqualis eſt rationi compoſitæ, ex Ωω ad ΔΘ, & ex ϖΥ ad ΣΠ: hoc eſt ratio rectanguli ſuper ΓΔ & ΛΣ, ad rectangulum ſuper ΨΩ & Ξϖ, æquatur rationi rectanguli ſuper Ωω & ϖΥ, ad rectangulum ſuper ΔΘ & ΣΠ: ſed prædicta rectangula, baſes ſunt paralelop. ex A in β, G in T, P in σ, L in μ, & altitudines vtrobique ſunt æquales, igitur vt ſolidum ex A in β, eſt ad G in T, ita P in σ, ad L in μ: ſimiliter oſtendam eſſe, vt C in γ, ad H in V, ita Q in η, ad M in ν & ſic de reliquis. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc ſequitur proportionem rationis paralelop. A ad G, ad rationem P ad L, eandem eſſe, cum proportione rationis, paralelop. A in β, ad G in T, ad rationem P in σ, ad L in μ: & permutando proportionem rationis paralelop. A ad G, ad rationem paral. ex A in β, ad G in T, eandem eſſe, cum proportione rationis, Paral. P ad L, ad rationem paral. ex P in σ ad L in μ; & ſic de reliquis.

Lemma.

EAdem manente figurâ: ſunto rationum AG, CH, DI, EK, denominatores, α, β, γ, δ: & rationum PL, QM, RN, SO, denominatores ι, λ, μ, ν: item rationum Aβ ad GT, Cγ ad HV, Dδ ad IX, Eλ ad KY, denominatores Λ, Π, Φ, Σ: denique rationum Pσ ad Lμ, Qη ad Mν, Rθ ad Nς SZ ad Oξ denominatores Γ, Δ, Ξ, Θ.

Dico omnes α, β, γ, δ, eſſe ad omnes ι, λ, μ, ν, ſicut omnes Λ, Π, Φ, Σ, ſunt ad omnes Γ, Δ, Ξ, Θ.

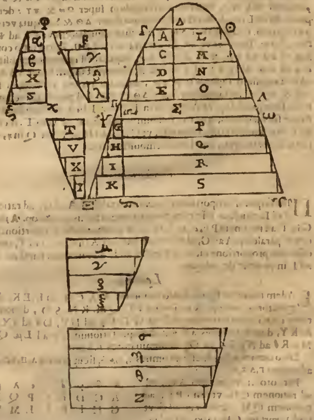
Per coroll. 1. huius, ratio AG, eſt ad rationem CH, vt ratio PL, ad rationem QM: igitur α eſt ad β, vt ι ad λ: rurſum CH ratio, eſt ad rationem DI, vt ratio QM, eſt ad rationem RN: igitur β eſt ad γ, vt λ ad μ: denique DI ratio, eſt ad rationem EK, vt ratio RN, ad rationē SO: quare & γ eſt ad δ, vt μ ad ν.

α	β	γ	δ		ι	λ	μ	ν
A	C	D	E		P	Q	R	S
G	H	I	K		L	M	N	O
Λ.	Π.	Φ.	Σ		Γ.	Δ	Ξ	Θ
Aβ.	Cγ.	Dδ.	Eλ.		Pσ.	Qη.	Rθ.	SZ.
GT.	HV.	IX.	KY.		Lμ.	Mν.	Nς.	Oξ.

Iterum per coroll. propoſ. 2. huius: ratio AG, eſt ad rationem Aβ ad GT, vt ratio PL, ad rationem Pσ ad Lμ: igitur vt α ad Λ, ita ι ad Γ: item

item ratio C H, est ad rationem C γ ad H V, vt ratio Q M, ad rationem Q η ad M ν: igitur & β est ad π, vt λ ad Δ: item ratio D I, est ad rationem D δ ad I X, vt ratio R N, ad rationem R θ ad N ξ: quare γ est ad φ, vt μ ad Ξ: denique ratio E K, est ad rationem E λ ad K Y, vt ratio S O, ad rationem S Z ad O ξ: igitur vt δ ad Σ, ita ν ad ☉. igitur per 2. li. 1. de Conoidibus Archimedis, omnes α, β, γ, δ, sunt ad omnes ι, λ, μ, ν, sicut omnes Δ, Π, Φ, Σ, ad omnes Γ, Δ, Ξ, ☉.

PROPOSITIO III.



Iisdem positis: dico rationem solidi ex ductu Γ Δ Α Ξ in se ordinatè, ad solidum ex ductu ϖ α ζ ϖ in se ordinatè, esse ad ... ratio-

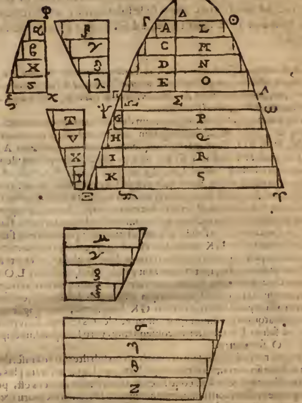
rationem solidi, ex ductu ΩωϖΥ in se ordinatè, ad solidum ex ductu ΔΘΞΠ in se ordinatè, sicut ratio solidi ex ΓΔΛΣ in se subalternè, ad solidum ex ΨΩΞϖ in se subalternè, ad rationem solidi ex ΩϖωΥ in se subalternè, ad solidum ΔΘΞΠ in se subalternè.

Facilitatis causâ: solidum ex ΓΔΛΣ in se ordinatè vocetur solidum AE ordinatum; idem vero in se subalternè, vocetur solidum AE subalternum. & sic de reliquis, sumendo primam & vltimam litteram latinam, addendoque ad distinctionem, ordinatum vel subalternum.

Per lemma præcedens, aggregatum denominatorum rationum AG, CH, DI, EK, est ad aggregatum denominatorum rationum PL, QM, RN, SO, sicut aggregatum denominatorum rationum A β ad GT, C γ ad HV, D δ ad IX, E λ ad Ky, est ad aggregatum denominatorum rationum P σ ad L μ, Q η ad M ν, R θ ad N ρ, SZ ad O ξ. si igitur paralelopipeda, inter quæ prædictæ existunt rationes, non auferant plus dimidio solidorum, quibus sunt inscripta, inscribantur tot, vt auferatur plus dimidio, & eadem fiat ratiocinatio, hoc modo: aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini, sunt paralelopipeda inscripta solido AE ordinato, consequentes vero, sunt paral. inscripta solido GK ordinato, est ad aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini, sunt paralelop. inscripta solido PS ordinato, consequentes vero sunt paral. inscripta solido LO ordinato, sicut aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini sunt paralelopip. inscripta solido AE subalterno, consequẽtes vero sunt paral. inscripta solido GK subalterno, est ad aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini, sunt paral. inscripta solido PS subalterno, consequentes vero sunt paral. inscripta solido LO subalterno.

Iisdem rursum solidis, tam ordinatis quam subalternis, tot inscribantur per subdiuisionem altitudinum æqualium paral. quæ auferant plus dimidio residuorum, & eadem continuetur ratiocinatio: euidens est, per inscriptionem illam continuatam, tandem octo illa solida exhauriri; & quia altitudines illorum solidorum æquales sunt, eademque in omnibus fit subdiuisio in infinitum, item rationes omnes, quæ existunt inter infinita paralelopipeda, quæ exhauriunt prima quatuor solida ex ductu ordinato orta, referuntur & connexæ sunt, cum omnibus rationibus, quæ existunt inter infinita paralelop. quæ exhauriunt quatuor solida ex ductu subalterno nata, euidens est, vnum ex illis octo, non posse dici aut intelligi exhaustum, quin reliqua omnia simul exhausta esse intelligantur.

Igitur aggregatum infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini, sunt infinita paralelop. quæ vltimatè exhauriunt solidum ordinatum AE, consequentes vero, sunt infinita paralelop. quæ exhauriunt solidum ordinatum GK, est ad aggregatum totidem denominatorum, rationum totidem, quarum antecedentes termini, sunt infinita paralelop. quæ exhauriunt solidum ordinatum PS, consequentes vero sunt infinita paralelop. quæ exhauriunt solidum ordinatum LO; sicut aggregatum denominatorum infinitorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini sunt infinita paral. quæ exhauriunt solidum subalternum AE, consequentes vero, sunt infinita paral.



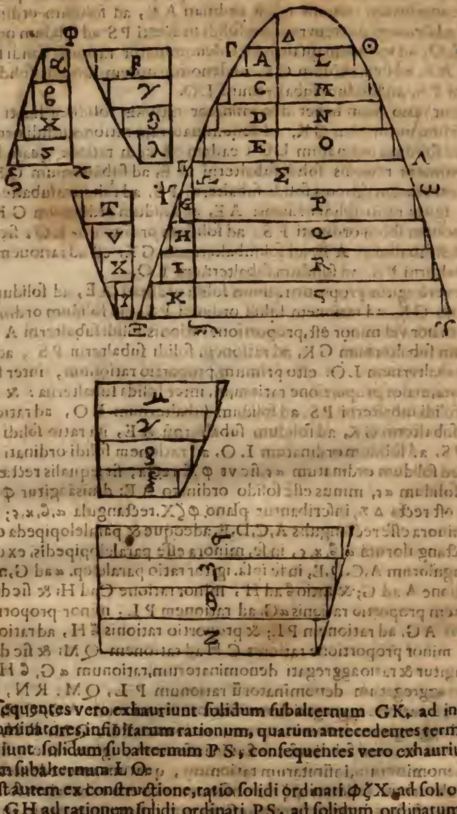
quæ exhauriunt solidum subalternum GK; est ad aggregatum totidem denominatorum, rationum totidem, quarum antecedentes termini sunt infinita paralelop. quæ exhauriunt solidum subalternum PS, consequentes vero exhauriunt solidum subalternum LO:

Sed proportio rationis aggregati infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini exhauriunt solidum ordinatum AE, consequentes vero exhauriunt solidum ordinatum GK, ad aggregatum infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini exhauriunt solidum ordinatum PS, consequentes vero exhauriunt solidum ordinatum LO, ad rationem aggregati denominatorum, infinitorum rationum infinitarum, quarum antecedentes termini exhauriunt solidum subalternum AE, consequentes vero exhauriunt solidum subalternum GK, ad aggregatum totidem denominatorum, totidem rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt

hauriunt ſolidum ſubalternum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum ſubalternum L O, eadem eſt cum proportione rationis quam habet denominator rationis ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ordinati P S ad ſolidum ordinatum L O; ad rationem quam habet denominator rationis ſolidi ſubalterni A E, ad ſubalternum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O.

Igitur ratio quam habet denominator rationis ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O; eadem eſt cum ratione quam habet denominator rationis ſolidi ſubalterni A E, ad ſubalternum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O. igitur ratio ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, eſt ad rationem ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O, ſicut ratio ſolidi ſubalterni A E, ad ſol. ſubalternum G K, eſt ad rationem ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O.

Sin verò: igitur proportio rationis ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, ad rationem ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O, maior vel minor eſt, proportione rationis ſolidi ſubalrerni A E, ad ſolidum ſubalternum G K, ad rationem ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O: eſto primum, proportio rationum, inter ſolida ordinata, maior proportione rationum, inter ſolida ſubalterna: & ſit, vt ratio ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O, ad rationem ſolidi ſubalterni G K, ad ſolidum ſubalternū A E, ita ratio ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O, ad rationem ſolidi ordinati G K, ad aliud ſolidum ordinatum α ς, ſic vt φ X recta, ſit æqualis rectæ Δ Σ: patet ſolidum α ς, minus eſſe ſolido ordinato A E: diuiſâ igitur φ X, vt diuiſa eſt recta Δ Σ, inſcribantur plano φ ζ X, rectangula α, ϐ, κ, ς; patet hæc minora eſſe rectangulis A, C, D, E, adeoque & paralelopipeda ex ductu rectangulorum α, ϐ, κ, ς, in ſe, minora eſſe paralelopipedis, ex ductu rectangulorum A, C, D, E, in ſe ipſa. igitur ratio paralelop. α ad G, minor eſt ratione A ad G; & ratio ϐ ad H, minor ratione C ad H; & ſic de cæteris: item proportio rationis α G, ad rationem P L, minor proportione rationis A G, ad rationem P L; & proportio rationis ϐ H, ad rationem Q M, minor proportione rationis C H ad rationem Q M; & ſic de cæteris. igitur & ratio aggregati denominatorum, rationum α G, ϐ H, κ I, ς K, ad aggregatum denominatorū rationum P L, Q M, R N, S O, minor eſt, ratione aggregati denominatorum, rationum A G, C H, D I, E K ad aggregatum denominatorum, rationum P L, Q M, R N, S O: quod cum in omni ſubdiuiſione fiat in infinitum; igitur ratio infinitorum denominorum, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum φ ζ X, conſequentes vero exhauriunt ſolidum G K, ad infinitos denominatores, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum L O, minor eſt ratione infinitorum denominatorum, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini, exhauriunt ſolidum A E conſequentes vero exhauriunt ſolidum G K, ad infinitos denominatores, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum L O; igitur etiam minor eſt ratione infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini, exhauriunt ſolidum ſubalternum A E,



consequentes vero exhauriunt solidum subalternum GK, ad infinitos denominatores, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt solidum subalternum P S; consequentes vero exhauriunt solidum subalternum L O.

Est autem ex constructione, ratio solidi ordinati $\phi \zeta X$ ad sol. ordinatum G H ad rationem solidi ordinati P S, ad solidum ordinatum L O, vt ratio solidi subalterni A E, ad subalternum G K, est ad rationem solidi subalterni P S, ad sol. subalternum L O; adeoque ratio denominatoris rationis solidi ordinati $\phi \zeta X$ ad sol. ordinatum G K, ad denominatorem rationis sol. ordinati P S ad sol. ordinatum L O, eadem cum ratione denominatoris rationis solidi subalterni A E, ad subalternum GK, ad denominatorem rationis solidi subalterni P S, ad subalternum L O.

Igitur in nulla ordinata subdiuisione, & corporum inscriptione in his

octo

octo solidis, erit reperire proportionem vnam denominatorum rationum quæ existunt inter inscripta corpora, quæ æqualis sit proportioni denominatorum rationum, quæ existunt inter tota solida, quibus ordinatè corpora illa inscripta sunt, sed hâc semper minorem: quod absurdum & impossibile. igitur proportio rationum inter quatuor ordinata solida, AE, GK, PS, LO, non est maior proportione rationum, inter quatuor solida subalterna AE, GK, PS, LO: similiter ostenditur, quod illa non sit minor hâc, æqualis igitur vt sit necesse est.

Respondetur variorum obiectionibus.

PRopositionem præcedentem, duplici aliâ methodo demonstrauit Auctor, lib. 10. oper. Geom. propos. 61. quarum vna ad normam Archimedeæ, quæ 2. est de conoid. exacta est: hanc diuersimodè oppugnant varij, sed vt mox ostendam, nullo operæ pretio. & primum quidem

Contendit Censor A A, illam nullo modo ad normam Archimedeæ institutam esse, adeoque non subsistere: *non enim*, inquit, *est vt P ad Q ita A ad C, & C ad D, vt Q ad R:* (vid. fig. præced.) *& sic de cæteris: quod ad Archimedæam requiritur* &c. At non aduertit Censor, Archimedem quatuor tantum vti magnitudinum ordinibus, quas per rationes simplices certâ lege inter se connectit; Auctorem vero, octo adhibere quantitatum ordines, quas per rationum simplicium proportiones, eâdem lege colligat, quâ suas Archimedes per rationes simplices; adeoque demonstrationem propos. 61. lib. 10. oper. Geom. nil aliud esse, quam Archimedæam proportionibus applicatam; ac proinde nec posse, nec debere esse; *vt P ad Q ita A ad C, & C ad D vt Q ad R*, sed rationem AG debere esse ad rationem CH, sicut PL ratio est ad rationem QM; item rationem CH esse ad rationem DI, sicut ratio QM est ad rationem RN: quidquid enim per rationes simplices, determinatarum quantitatum, de aggregatis ipsarum quantitatum inferri potest, idem potest de duplo pluribus quantitatum aggregatis, per rationum simplicium proportiones, si eâdem lege, quâ simplices rationes, inter se ordinatæ sint. hoc vbi maturè expenderit Censor, tum non ad friuolam assertionem, nulli innixam argumento, sed ad geometricam veniat demonstrationem, si quid opponendum sit.

Alio eandem demonstrationem propos. 61. argumento oppugnat nonnemo: *vt*, inquit, *legitima sit demonstrationis illius sequela, deberent rationes omnes AG, CH, DI, EK simul sumptæ, æquari vni rationi, quam habet aggregatum quantitatum A, C, D, E, ad aggregatum G, H, I, K, & sic de cæteris*; tum id falsum esse magno molimine demonstrat. & vero est falsissimum: imo impossibilis est casus, in quo id possit contingere, nisi quando rationes illæ omnes, commune habent consequens: neque ad hoc demonstrandum tanto opus erat apparatu, cum per se clarum sit; at hoc demonstrari debebat, quod vt legitima Auctoris esset demonstratio, *debeat ratio aggregati quantitatum A, C, D, E, ad aggregatum G, H, I, K, æqualis esse rationibus omnibus AG, CH, DI, EK simul sumptis*: quo nihil minus factum est; neque porro fieri potest, cum falsum sit, & argumentum inde petitum, æque secundam de conoid. Archimedis, & 12. 5. Euclidis, ac propos. 61. Auctoris impugnet.

Eandem rursus demonstrationem, ingenti labore examini subiecit A-

lexius Syluius: atque vbi ſex paginas geometrico illius examini, ſruſtra ſe impendiſſe aduertit, *hucuſque*, inquit, *proceſſimus, vlterius non occurrit quomodo geometricè oſtendatur, ratio F ad H, maior quam G ad I* (id eſt proportio rationum inter aggregata paralelop. inſcriptorum quatuor ſolidis ex ductu ordinato, maior proportione, rationum inter aggregata paralelop. inſcriptorum ſolidis ex ductu ſubalterno) *licet per numeros talis inueniatur.* A

Porro examen per numeros inſtitutum, vti geometrico, multò fuit laborioſius, (nam paginas complures cyfris onerauit) ita infelicius ſucceſſit: quod ſingillatim hîc oſtendere, nec operæ duxi pretium, nec tantum temporis illi lubuit impendere. præterquam enim, quod illius constructio, quæ fit per diuiſionem axis parabolæ in decem partes lateri recto æquales, nullo modo conueniat cum conſtructione Auctoris, quæ duas ſumit diuerſas diametros æquales, & quaſcunque, numeri quos pro quantitatibus in Auctoris propoſitione 61, libr. 10 repertis ſupponit, planè abſoni ſunt, & nullam proportionem habent earum, quæ quantitatibus illis communes ſunt, & ex quibus veluti præmiſſis, tota demonſtrationis concluſio dependet; oſtenderat Auctor, rationem paralelop. A ad paralelop. G, eandem eſſe cum ratione par. P ad par. L: item rationem C ad H, eandem eſſe cum ratione Q ad M; & ſic deinceps; vnde ſequitur A ductum in L, æquari G ducto in P, & C in M, æquari H in Q; &c. quorum neutrum conuenit numeris ab Alexio Syluio pro quantitatibus in Auctoris propoſitione repertis, ſuppoſitis: vt hic in adiuncto ſcemate eſt videre, nam numerus A, ductus in numerum L, longè aliam ac diuerſam producit ſummam, quam G numerus ductus in numerum P. vnde non eſt numerus A ad numerum G, vt numerus P, ad numerum L. ſimiliter oſtenditur, numerum C, ductum in numerum M, non idem producere, quod H numerus ductus in numerum Q: & ſic de reliquis; vnde mirum non eſt, quod ex numeris non proportionalibus concluſionem inferat, diuerſam ab ea, quam Auctor ex quantitatibus infert proportionalibus. idem error eſt in reliquis omnibus numeris, tum quos eâdem paginâ, tum ſequentibus tribus proponit. vanum igitur ac nullum eſt Alexij Syluij examen.

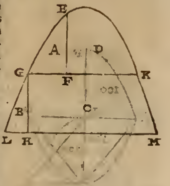
A.41421356.	L. 241421356
C.73205080.	M. 273205080
D.100000000.	N. 300000000
E.123606797.	O. 323606797
G.21321355	P. 468534949
H 40968334	Q. 488181928
I. 59235915	R. 506449509
K.76393203	S. 523606797.

A in L
9999999932878736.
G in P
9989799977535895

Aliter & accuratius ſecundam hanc quadraturam excuſſit R. P. Leotaudus: qui relictâ Auctoris propoſ. 61. (quæ tantum agit de proportionibus rationum, inter aggregata paralelopipedorum inſcriptorum octo ſolidis) ſequentem id eſt 62, quæ agit de proportionibus rationum, quæ ſunt inter ſolida tota, ſibi hâc methodo examinandam aſſumpſit.

Eſto parabola E G L M, in qua aſſumptis duabus diametris æqualibus, E F, G H: ducantur ad illas, normales G K, L M: tum (omitto reliquas lineas in ſyſtemate ab illo conſtructo expreſſas, quod inſtituto meo non inſeruiant) ex data linearum aliquot in ſyſtemate deſignatarum quan-

quantitate in numeris, reliquarum colligit in numeris quantitatem. dein ex nota linearum illarum in numeris quantitate, plana ipsa A, B, C, D, &c. in numeris nota facit. ex his denique ipsa solida A, B, C, D, ex ordinato ductu orta in numeris exhibet: quia vero rationes, quatuor solidorum A, B, C, D, ex subalterno ductu ortorum, præcisè numeris exprimi non possunt, vtpote quæ dependeant ab exacta perimetri, atque areæ circularis dimensione; verorum numerorum loco, supponit, alios quidem iusto maiores, alios minores: tum sic argumentatur; si ratio solidorum ordinatorum A ad B, sit ad rationem solidorum ordinatorum C ad D, vt ratio solidorum subalternorum A ad B, est ad rationem solidorum subalternorum C ad D, igitur proportio rationis ordinatorum A ad B, ad rationem ordinatorum C ad D, eadem est cum proportione rationis subalternorum A ad B, ad rationem subalternorum C ad D: cum autem, tam quatuor solida ordinata A, B, C, D, quam subalterna numeris exhibita sint, adeoque & illorum rationes, reducantur duæ rationes ordinatorum ad commune consequens erunt antecedentes termini in minimis numeris exhibiti, K & L: adeoque ratio ordinatorum A ad B, erit ad rationem ordinatorum C ad D, vt K ad L: idem fiat de rationibus subalternorum. quæ reductæ ad commune consequens, habebunt antecedentes terminos, his numeris (siue iusto maioribus siue minoribus perinde est) expositos M. N: eritque ratio subalternorum A ad B, ad rationem subalternorum C ad D, vt M est ad N: igitur si vera est propos. 62. Auctoris, erit K ad L vt M ad N: & K in N, æquale M in L: est autem ex K in N, productum P, & ex M in L, productum Q, igitur P æquale est ipsi Q: quod tamen manifestè patet falsum esse. non igitur vera est Auctoris propos. 62, adeoque cum huic tota innitatur quadratura, necesse est & hanc corruere.

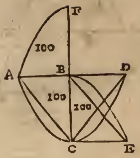


K 30375 L 38342
M 3180861 N 3477565

P 105648229125
Q 121960917540

Hæc est ratiocinatio viri doctissimi, quæ legitimè contra Auctorem oper. Geom. concludit, si in præmissis peccatum non sit: porro vbi, & in quo peccatum sit, adeoque vnde inæqualitas illa proportionalitatis, cuius denominatores sunt P & Q, orta sit, melius vt intelligatur.

Aduertendum est, in quo differat ductus plani in planum, ex quo Auctor sua format solida, à multiplicatione numeri per numerum, qui loco planorum supponuntur, vt productus ex illa numerus, solidum exhibeat; nimirum in hoc differt: quod Auctoris ductus, ita dependeat à figura & situ planorum, quæ in inuicem ducuntur, vt alterutro mutato, aliud & mole diuersum à priori oriatur solidum; iidem vero numeri quomodocunque in se inuicem ducti, idem semper producant: quod exemplis sic ostendo. & primò quidem in eo ductu, in quo eâdem seruatâ figurâ, solus



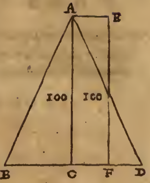
lus situs mutatur, esto triangulum rectangulum ABC, hoc ductum in se ordinatè, siue in triangulum BDC, producit pyramidem, duplam eius, quæ oritur ex ductu trianguli eiusdē ABC, in se subalternè, siue in triangulum BCE. sit ergo triangulum ABC numeris expressum 100, erit etiam tam BDC, quam BCE triangulū, in numeris 100: at 100. in 100 idē semper producit, igitur triangulum ABC, 100, siue ducatur in triangulum BDC, siue in BCE (cum vtrūque in numeris sit 100) idem producet: quod tamen est falsum: cum ABC triang. ductum in BDC, producat duplum eius, quod ABC in BCE. alius igitur est ductus plani in planum, ex quo Auctor sua format, & producit solida, alia multiplicatio numeri in numerum, qui loco planorum supponuntur, ex qua numerus productus solidum exhibet. quæro modo: si aliundè notum non esset quod triangulum ABC, ductum in triangulum BDC, aliud solidum, & quidem duplum producat illius, quod oritur ex ductu eiusdem trianguli ABC, in triangulum BCE; & triangulis illis ABC, BDC, BCE in numeris designatis, nimirum singulis 100, quis velit exhibere in numeris solida, quæ oriuntur ex ductu trianguli ABC in BDC, vel in æquale BCE, an non idem in numeris inueniet solidum. ex ABC in BDC, cum eo quod oritur ex ABC in BCE? plane idem. & tamen iuxta ductum Auctoris, illud, duplum est huius. an igitur precisè ex triangulis illis, in numeris notis, exhiberi in numeris non poterit differentia, inter solidum ex ABC in BDC, & solidum ex ABC in BCE, supposito quod aliundè non innotuerit? potest omnino. at qui numeri plana illa exhibentes disponi debeant, mysterium est; quod hactenus eos omnes latuit, qui quadraturas ad Arithmeticæ tribunal vocauere.

Rursum parabola ACB ducta in se ordinatè, siue in parabolam BCD, producit solidum, æquale cubo, determinatam habenti basem & altitudinē: eadem vero parabola ACB, ducta in se subalternè, siue in parabolam CBE, solidum producit, æquale semicylindro determinatam habenti basim & altitudinem: quæ duo solida, non modo figurâ, sed ita magnitudine & mole differunt, vt qualis inter ea sit ratio hactenus non innotuerit. porro parabolas easdem in numeris notas, si iuxta numerorum leges in inuicem ducas, idem semper in numeris exhibebitur solidum.

Iterum parabola ABC, si secundum diametros axi paralelas ducatur in se, seu in parabolam AFB, aliud plane solidum, & mole diuersum ab eo producet, quod oritur ex eadem parabola ducta iuxta ordinatim ad axem positas, in se, siue in parabolam BCD.

Secundò, in eo ductu, in quo eodem seruato situ, sola figura mutatur: esto ABC triangulum rectangulum cuius area in numeris designata, sit 100; huic æquale & in eadem altitudine adscribatur rectangulum ACFE;

ACFE; erit huius area in numeris 100: si igitur in numeris, iuxta leges Arithmeticæ, quæras solidum ex ductu triãguli ABC in se: idem orietur siue triangulum ABC, ducas in se ipsum, siue in triangulum ACD, siue in rectangulum ACFE: & tamen iuxta ductus Auctoris, triangulum ABC in se, vel in ACD ductum, planè aliud producit solidum, & mole diuersum ab eo, quod oritur ex ductu trianguli ABC in rectangulum ACFE:



Rursum aliud ac diuersum mole oritur solidum, ex ductu rectanguli AECF in se, quam ex ductu trianguli ABC in se, licet illius area huius areæ sit æqualis.

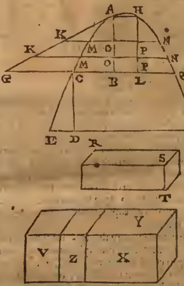
His rectè perceptis, *Dico* primam causam inæqualitatis inter P & Q, hoc est inter proportionem rationum, quæ sunt inter quatuor solida, ex ductu ordinato orta, & proportionem rationum, quæ existunt inter quatuor solida, ex ductu subalterno orta, inde natã esse; quod (vt ipse P. Leotaudus rectè aduertit) proportio rationum, quæ sunt inter solida ex ductu subalterno orta, veris ac præcisis numeris exprimi non possit, quia illa dependet ab acurata perimetri, & areæ circularis dimensione, quam veris ac præcisis numeris exhibere nondum contigit; alia vero proportio rationum inter corpora ex ductu ordinato nata veris ac præcisis numeris exhiberi possit & exhibita ab ipso supponatur: vnde, planè necesse est, inter vtramque illam proportionem, numeris exhibitam, inæqualitatem aliquam intercedere.

Secunda & maxima causa inæqualitatis, inter numeros P & Q, est, quod P. Leotaudus quantitates arearum, planorum, ex quorum ductu sua format corpora, tantum considerarit, numerosque, quibus illas expresserat, in se ipsos, vel in alios iuxta consuetas arithmeticæ leges duxerit, nullâ habitâ ratione, in plerisque figuræ aut situs planorum, à quibus tamen ita dependet Auctoris ductus, vt alterutro mutato, aliud planè & mole diuersum oriatur solidum, vt ante demonstraui: vnde mirum non est, quod tanta inæqualitas inter proportiones P & Q reperiatur, cum in ductibus pæne singulis, ex quibus octo illa solida nata sunt, peccatum sit. idem error commissus est in numeris, quibus solida, eorumque proportiones, in duabus reliquis quadraturis, designat. nihil igitur contra quadraturas euicit R. P. Leotaudi examen.

PARS SECVNDA

Reductio partium parabolicarum, tum ordinatè tum subalternè in se ductarum, ad alia solida, notam habentia altitudinem, & basim determinatam.

PROPOSITIO IV.



Sint AB, CD diametri quæcunque æquales, in parabola AEF: actisque per B & D normalibus CQ, EF, ducatur AH, paralela CQ.

Oportet solida orta ex ductu ordinato partium ACB, BAHQ, CED, DCQF in se ipsas, reducere ad nota corpora.

Demonstr.

Agatur per A, contingens AG, occurrens CQ productæ in G; ponanturque rectæ KMN, paralelæ GQ; & HL, paralela AB: per 89 de parab. rectæ MK, MO, OP semper sunt continuè proportionales; igitur per 45 de ductibus, mixtilineum AGCMA, ductum in altitudi-

altitudinem O P, æquatur parti A C B ductæ in se: quia vero quadrata est parabola A G C, fiat illi æquale rectangulum R S: erit hoc ductum in altitudinem S T, æqualem O P, æquale mixtilineo A G C in O P, hoc est parabolæ A C B ductæ in se.

Eâdem methodo, reducetur pars C E D ducta in se, ad paralelopipedum notum:

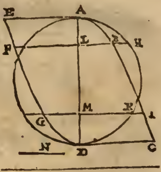
Rursum pars parabolica C A H L ducta in se æquatur C A B in se, A H B L in se, & A C B, bis in A H B L, per 199 de ductibus: at A H B L in se, producit paralelop. cuius basis est quadratum A H, & altitudo A B: sit illud paralelop. V. & C A B in se, producit paralelop. R S T: fiat igitur paralelop. R S T æquale paral. Z, in eadem altitudine cum paral. V: erit aggregatum paral. V, Z, æquale solidis duobus, ex A C B, A H B L in se ipsa: iterum fiat vt A B ad duplam A H, ita rectangulum R S ad rectang. Y. erit Y ductum in altitudinem A B, æquale rectang. R S in duplam A H, hoc est paralelop. X, æquale parabolæ A C B ductæ in duplam A H. totum igitur paralelop. V Z X, æquatur C A H L ductæ in se.

Eâdem prorsus methodo reducetur corpus ex ductu D C Q F in se, ad notum paralelepipedum: fecimus igitur &c. quod erat propositum.

Corollarium.

Hinc patet praxis, quâ quatuor illa solida, ex ductu ordinato orta, reduci possint, ad alia corpora nota, eandem habentia altitudinem; adeoque innotescere possit proportio, quæ existit inter duas rationes, quarum termini sunt illa quatuor solida.

PROPOSITIO V.

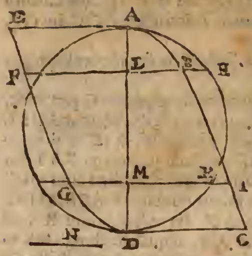


Sint A C D, A D E parabolæ duæ æquales, & ad eundem axem A D, subalternè positæ: descriptoque super A D, vt diametro, circulo A H K D, ponantur duæ quæuis normales, H F, I G ad axem A D: fiatque vt H L, ad B L, sic L F ad N.

Dico segmentum circulare H L K M, ductum in altitudinem N, æquari parti parabolicæ B L I M, ductæ in partem F L M G.

Demonstratio.

Per 67. lib. 10. oper. Geom. vt H L ad K M, ita B L F rectangulum est ad rectang. I M G: sed etiam vt H L ad K M, ita rectang. super H L & N, ad rectang. super K M & N, igitur vt B L F rectang. ad rectang. I M G, ita H L N rectang. ad rectang. K M N; est autem per constr. rectang.

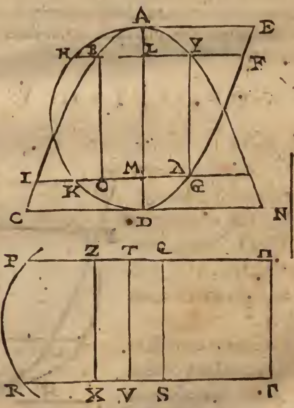


ctang. B L F, æquale rectang. H L N, igitur & I M G rectang. æquatur rectang. K M N: quod, quia semper fit in omnibus rectangulis, quotcunque ducantur paralelæ, manifestum est per exhaustionem factam in 45 de ductibus, segmentũ circulare HLKM, ductum in altitudinem N, æquari parabolæ B L M I, in parabolam FLMG quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Eadem methodo demonstratur, totum semicirculum A H K D, ductum in altitudinem N, æquari paraqolæ A B C D, ductæ in parabol. A E G D.

PROPOSITIO VI.



Eadem figura positâ, dimittatur ex B, diameter B O, occurrens I G lineæ in O.

Opor-

Oporteat solidum ex I B O in se subalternè, reducere ad partem cylindricam, determinatam habentem basim & altitudinem.

Demonstratio.

ESto P R S Q segmentum circulare, idem cum H L K M: adeoque ductum in altitudinem N, sit æquale parti I B L M, ductæ in se subalternè. per 199 de ductibus, pars I B L M in se subalternè æquatur parti I B O in se subalternè, B O L M in se, vna cum I B O, bis ductæ in B L O M: cum igitur B L O M in se, producat notum paralelopip. habens altitudinem B O, & pro basi quadratum B L, fiat rectang. T Q S V, quod ductum in altitudinem N, sit æquale B L O M ducto in se. item cum quadrata sit parabola B I O, si huic rectangulum fiat æquale, & ducatur in duplam B L, erit hoc æquale parabolæ I B O, bis ductæ in B L O M: fiat igitur rectangulum Z T Y X, quod ductum in altitudinem N, sit æquale I B O, ducto in duplam B L: erit igitur rectangulum totum Z Q X S in altitudinem N, æquale B L O M ducto in se, vna cum I B O, bis ducto in B L O M: totum autem P Q R S in N, æquatur I B L M in se subalternè, hoc est B L O M in se, I B O bis in B L O M, vna cum I B O in se subalternè: igitur residuum segmentum circulare P Z R X, in altitudinem N, æquatur residuo I B O, ducto in se subalternè. fecimus igitur &c. quod erat præstandum.

Corollarium.

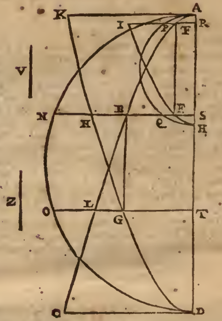
EAdem methodo exhibebitur parti I B Y λ in se subalternè, solidum æquale cylindricum: nam I B Y λ in se subalternè, æquatur I B L M in se subalternè (hoc est P Q R S in altitudinem N) vna cum L Y M λ in se, & I B L M bis in L Y M λ. sed I B L M bis in L Y, & L Y M λ in se, producunt nota paralelopipeda, si his æquale fiat rectangulum Q S π Γ in altitudinem N, patet segmentum P R π Γ in altitudinem N, æquari I B Y λ in se subalternè.

PROPOSITIO VII.

SInt F E, B G diametri quæcunque æquales, in parabola A B C D: ducanturque per E, & G, normales ad axem, B S, L T.

Oportet ostendere, corpora ex ductu partium F B E, L B G in se subalternè, & reducta ad frusta cylindrica, habere diuersas altitudines, & pro basibus, segmenta circularia diuersorum circulorum; vtrumque autem oporteat determinare.

Demonstratio.



DVctâ FR normali ad axem, sumptâque SH æquali AR; ducatur HEI parabola (cuius axis AH & vertex H) æqualis & subalternè posita ipsi AFB: dein super AH vt diametro, describatur semicirculus APQH: fiatque vt PR ad FR, sic IR ad V. per 5 huius, erit RPQS segmentum circulare, ductum in altitudinem V, æquale parti parabolicæ RFBS in se subalternè, & per præcedentem propos. pars BFE in se subalternè, æqualis parti cylindricæ, cuius altitudo est V, & basis pars segmenti PRQS, determinata.

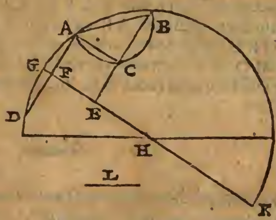
Rursum sumatur TD, æqualis AS, & super AD vt diametro, describatur semicirculus, ducaturque parabola DGK, æqualis, & subalternè posita, parabolæ ACD: fiatque, vt NS ad BS, sic MS ad Z: per 5 huius, segmentum circulare NOST, ductum in altitudinem Z, æquale est parabolæ LBST, ductæ in se subalternè. & per propos. præced. pars LBG in se subalternè, æquatur frusto cylindrico, cuius altitudo est eadē Z, & basis, pars determinata segmenti circularis NOST. igitur ostendimus &c. quod erat faciendum.

Nota

VT ex iis quæ hucusque posita ac demonstrata sunt, facilius circulus ad quadram reduci possit, lemmata nonnulla & animaduersiones subiungo, quæ quidem

quidem ad rem quam agimus, necessaria sunt, sed eiusmodi tamen, quæ quiuis geometra facilè per se expedire posset:

Lemma I.

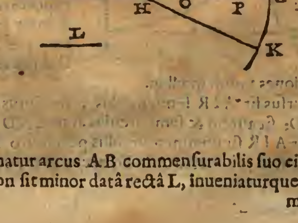


Dato arcu A B, qui minor, sit semiperipheria sui circuli illi tamen commensurabilis.

Oportet inuenire diametrum G K, ad quam, si ab extremitatibus arcus dati, dimittantur normales, intercipiant lineam in diametro, datæ rectæ L æqualem; oportet autem rectam L, non maiorem esse linea A B.

SVper recta A B vt diametro, describatur semicirculus A C B, in quo aptetur A C æqualis datæ L. ducaturque B C. cui ex A, ponatur paralela A D: vel igitur A D continget circulum D B K, vel secabit: si prius, patet A C, quæ normalis est ad A D, productam transire per centrum H, adeoque in A C linea, problema absolui. si posterius: diuidatur A D bifariam in F, & per F H ducatur normalis G K. patet illam transire per centrum H, & B C productam secare in E ad angulos rectos, adeoque illam diametrum esse, quam lemma postulat.

Lemma II.



Data quauis L, quæ minor sit dato diametro D C, semicirculi D A C:

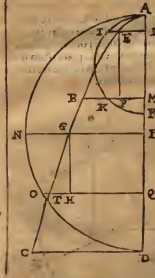
Oportet exhibere arcum M N, circulo suo commensurabilem; à cuius extremitatibus dimissæ normales ad diametrum datam C D, intercipiant in ea partem O P, datæ L æqualem.

PEr lemma præcedens, sumatur arcus A B commensurabilis suo circulo, cuius subtensa A B, non sit minor datâ rectâ L, inueniaturque diamete*r*

meter G K, ad quam ex A & B dimissæ normales, intercipiant partem F E, datæ L æqualem: tum H E lineæ, sumatur æqualis H O, & F G æqualis P C; eriganturque ex O & P, normales ad diametrum D C, intercipientes arcum M N, dico illum esse qui quæritur. cum enim H C, H G semidiametri sint æquales, item O H, E H, & O M normalis ad suam diametrum, sicut E B est ad suam, erunt O M, E B æquales: similiter æquales sunt rectæ P N, F A; item O P, F E: igitur arcus M N æquatur arcui A B; sed A B ex hypotesi commensurabilis est suo circulo D B C, igitur & arcus M N, eidem est commensurabilis: rectæ insuper M O, N P, sunt normales ad D C diametrum, & O P linea intercepta, est æqualis rectæ F E, hoc est datæ L, factum igitur est quod petebatur.

Scholion.

QVoniam in præcedentibus propositionibus omnibus, assumpta fuere in parabola diametri duæ æquales quæcunque, certum est quidquid de illis demonstratum est, etiam verificari in diametris duabus æqualibus, quas mox ex lemmate præced. determinabo. imo cum absque hac diametrorum determinatione difficulter quadratura vlterius quam Auctor fecerit, deduci possit, maximè velim propositiones omnes partis primæ & secundæ huius, de iis diametris æqualibus, & parabolarum partibus intelligi, quas iam determinabo.

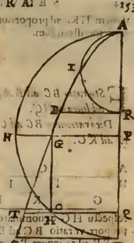


Esto A B C parabolæ axis A D: sumptâque in illo parte quâuis A R, describatur super illa vt diametro, semicirculus A I R; in quo sumatur arcus quiuis I K, commensurabilis peripheriæ A I R; ducanturque, I L, K M normales ad A R, dein alius describatur quiuis semicirculus A N D, cuius perimeter sit commensurabilis perimetro A I R; tum per lem. 2. inueniatur in perimetro A N D, arcus aliquis N O, commensurabilis peripheriæ A N D, à cuius extremitatibus, eductæ normales N P, O Q, intercipiant partem diametri P Q, æqualem parti L M; denique ex punctis E & G in quibus parabolam secant lineæ I L, N P, ducantur normales E F, G H: erunt illæ æquales rectis L M, P Q, adeoque & inter se; & diametri, ac partes parabolicæ B E F, T G H, illæ, de quibus præcedentes & sequentes propositiones velim intelligi.

Rursus sit A I R semicirculus, descriptus super A D axe parabolæ A C D; sit autem & semicirculus alius A N D priori maior, sic vt perimeter A I R sit commensurabilis perimetro A N D: tum per lem. 2. inueniatur in perimetro A N D, arcus N O, commensurabilis perimetrô

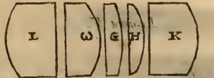
A N D

AND, à cuius extremitatibus N &c. O, eductæ normales ad axem A D, intercipiant in illo partem P Q, æqualem diametro A R: ducaturque ex G puncto intersectionis, recta GH, paralela axi A D. erunt rursus A R; GH diametri æquales, & partes parabolicæ A B R, G T Q, vt prius determinatæ:



Casum hunc, à priori distinxi; eo quod dum vna æqualium diametrorum est axis parabolæ, veluti hic est A R, pars parabolica B A R, ducta in se subalterne, producit corpus æquale semicylindro cuius basis est semicirculus A I R. in priori verò casu, quia E F non est axis, sed diameter secundaria, pars parabolica B E F, ducta in se subalternè, producit frustum cylindri, cuius basis est segmentum aliquod semicirculi A I R.

Lemma III.



Datæ sint tres quantitates quæcunque, G, H, K; & ponatur quarta L, æqualis ipsi K, & inter G & L, quæuis ponatur quantitas ω.

Dico proportionem rationis G H ad rationem H K, esse ad proportionem rationis G ω ad rationem ω L, sicut ω ductum in ω, ad H ductum in H.

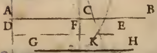
VT ratio G H, ad rationē H K, ita G ductum in K, ad H ductum in H per 84:l.8. similiter vt ratio G ω ad rationem ω L, ita G ductum in L, ad ω ductum in ω. igitur vt ratio G ducti in K, ad H in H, ad rationem G ducti in L ad ω ductum in ω, ita proportio rationis G H ad rationem H K, ad proportionem rationis G ω, ad rationem ω L; sed ratio G ducti in K, ad H in H, est ad rationem G ducti in L (hoc est iterum G ducti in K) ad ω in ω, vt ω ductum in ω, ad H ductum in H per 7. de proport. igitur vt ω ductum in ω, ad H ductum in H, ita proportio rationis G H ad rationem

tionem HK, ad proportionem rationis G ad rationem L. quod erat demonstrandum.

Lemma IV.

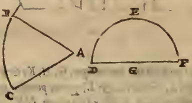
Esto ratio BC ad BA, ad rationem EF ad ED, vt HK linea ad lineam HG.

Dico rationem BC ad CA esse ad rationem EF ad FD, vt HK est ad KG.



QVoniam ratio BC ad BA est ad rationem EF ad ED, vt HK est ad HG, igitur rationis BC ad BA denominator est HK respectu HG denominatoris rationis EF ad ED. est autem per 39 de proport. vt ratio BC ad BA ad rationem EF ad ED, ita ratio BC ad EF ad rationem BA ad ED, erit igitur ratio HK ad HG, ratio denominatorum rationum BC ad EF, & BA ad ED. ergo ratio antecedentium BC ad EF ad rationem differentiarum CA ad FD, eadem erit cum ratione antecedentis HK ad differentiam KG. sed vt ratio BC ad EF est ad rationem CA ad FD, ita ratio BC ad CA est ad rationem EF ad FD per 39 de proport. igitur vt HK ad KG ita ratio BC ad CA ad rationem EF ad FD. quod erat demonstrandum.

Lemma V.



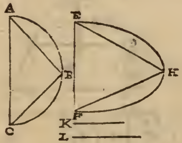
Datus sit sector ABC suo circulo commensurabilis. Oporteat illi semicirculum exhibere æqualem.

QVoniam sector ABC commensurabilis ponitur suo circulo, igitur pars est aliquota sui circuli; esto sextans. igitur & tertia pars erit medij circuli. fiat igitur vt tria ad vnum, ita quadratum AB, ad quadratum GD, & super GD vt semidiametro describatur semicirculus DEF:

dico

dico illum æquari sectori A B C; est enim semicirculus super A B vt semidiametro ad semicirculum D E F, vt quadratum A B ad quadratum D G, hoc est vt tria ad vnum, sed ex hypothesi semicirculus super A B semidiametro, est ad sectorem A B C, vt tria ad vnum, sector igitur A B C æquatur semicirculo D E F. igitur &c. quod erat faciendum.

Lemma VI.



Dato semicirculo & recta quauis E F, oportet super E F vt axe, semiellipsim describere, ad quam semicirculus A B C datam habeat rationem K ad L.

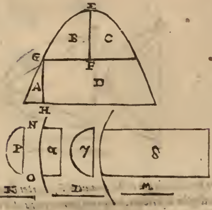
Constr. & Demonstr.

INscribatur semicirculo triangulum isosceles A B C, & super E F vt basi, isosceles describatur, ad quod A B C triangulum, datam habeat rationem K ad L, tum per puncta E H F semiellipsis describatur cuius axis sit E F. dico illam esse quæ petitur. est enim semicirculus ABC ad semiellipsim E H F, vt A B C triangulum ad triangulum E H F per 191. de ellipsi. sed triangula illa sunt vt K ad L, igitur & circulus est ad ellipsim vt K ad L. fecimus igitur &c.

PARS TERTIA

Exhibetur circuli quadratura.

PROPOSITIO VIII.



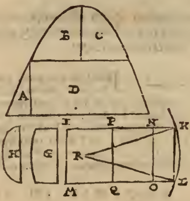
SIt E F axis parabolæ,& diameter GH, æqualis EF, iuxta determinationem factam in ſcholio lem.2. ductiſque per F & H normalibus,exhibeantur plana parabolica A,B,C,D.

Oportet tria ſolida cylindrica, orta ex ductu ſubalterno planorum A,B,D, reducere ad eandem altitudinem.

PEr 6.huius,illiuſque coroll. ſegmentum δ, in altitudinem M, æquale ſit D, in ſe ſubalternè. & ſemicirculus γ, in altitudinem L, ſit æqualis B in ſe ſubalternè; denique & ſegmentum α, in altitudinem K,ſit æquale A in ſe ſubalternè:quoniam A & D in ſe ſubalternè, ſunt partes eiuſdē ſegmenti in determinatam ducti altitudinem per coroll. propoſ.6. erunt M & K altitudines æquales. fiat igitur vt M ad L, ita ſemicirculus γ, ad ſemiellipſim P, cuius axis N O, æquetur diametro ſemicirculi γ: patet ex elementis P in altitudinem M, æquari γ in altitudinem L. factum igitur eſt quod petebatur.

PRO-

PROPOSITIO IX.



EXponatur eadem parabola quæ prius,& ſegmẽta tria G,H, IKLM, quæ ducta in eandem altitudinem, per præcedentem,facta ſunt æqualia tribus ſolidis ex ductu ſubalterno planorum A,B,D, in ſe ipſa. ſegmento autem G, æquale ponatur NKOL, ſectori vero RKL æquale fiat ſegmentum PKLQ.

Dico notam eſſe proportionem rationis,ſegmenti NKLO, ad ſegmentum PKLQ, ad rationem ſegmenti PKLQ, ad ſegmentum IKLM.

QVoniam ex hypotheſi facta in ſcholio ad lem. 2. partis 2. huius,arcus KL commenſurabilis eſt peripheriæ ſui circuli, erit ſector RKL commenſurabilis ſuo circulo, adeoque nota ratio ſectoris RKL ad ſemicirculum, cuius pars eſt; hoc eſt nota ratio ſegmenti PKLQ ad ſuũ ſemicirculum. ſed nota eſt ratio ſemicirculi, cuius pars eſt ſegmentum PKLQ ad ſemiellipſim H, igitur nota eſt ratio ſegmenti PKLQ ad ſemiellipſim H. igitur etiam nota eſt ratio ſegmenti PKLQ ducti in ſe,ad ſemiellipſim H ductam in ſe:ſed vt PKLQ ductum in ſe, ad H ductum in ſe,ita proportio rationis G ad H,ad rationem H ad IKLM,ad proportionem rationis NKLO ad PKLQ, ad rationem PKLQ ad IKLM, per lemma 3 partis præced. igitur nota eſt ratio proportionis G ad H,ad rationem H ad IKLM,ad proportionem rationis NKLO ad PKLQ. ad rationem PKLQ ad IKLM. ſed nota eſt proportio rationis G ad H ad rationem H ad IKLM(nam eadem eſt cum proportione ſolidorum, A,B,D in ſe ordinatè per 3 huius, quæ nota eſt per

 4 huius

4 huius,eiusque coroll.)igitur & nota est proportio rationis NKLO ad PKLQ ad rationem PKLQ ad IKLM.

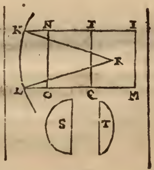
PROPOSITIO X.

Iisdem positis:dico notam esse proportionem rationis segmenti NKLO ad rectilineum PNOQ, ad rationem segmēti PKLQ ad rectilineum IPQM.

R T S

Per præcedentem, nota est proportio rationis, segmenti NKLO ad segmentum PKLQ. ad rationem segmenti PKLQ ad segmentum IKLM: sit igitur ratio NKLO ad PKLQ, ad rationem PKLQ ad IKLM, vt ST, ad SR: nota igitur est ratio ST ad SR, igitur & nota est ratio ST ad TR: sed vt ST ad TR ita ratio segmenti NKLO ad residuum PNOQ ad rationem segmenti PKLQ ad residuū IPQM per lemma 4. igitur proportio illarum rationum nota est.

PROPOSITIO XI.



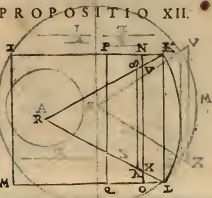
Exponantur segmenta IKLM, PKLQ, NKLO de quibus in præcedenti propos. dictum est: dico notam esse rationem segmenti NKLO ad residuum rectilineum PNOQ.

Fiat per lem. 5. part. 2. huius sectori RKL, æqualis semicirculus S. per præcedentem, nota est proportio rationis segmenti NKLO ad PNOQ, ad rationem segmenti PKLQ ad IPQM: sed proportio rationis segmenti NKLO, ad PNOQ, ad rationē segmenti PKLQ, ad IPMQ, eadem est cū proportione rationis segmenti NKLO, ad segmentum PKLQ, ad rationem rectilinei PNOQ ad rectilineum IPQM per 39. de proport. igitur & hæc proportio nota est. fiat igitur vt IPQM ad PNOQ, ita segmentum PKLQ (hoc est per constructionem præcedentis, sector RKL, hoc est per constructionē huius, semicirculus S)

ad

ad semiellipsim T. per lem. 6. erit igitur per 13. de proport. ratio segmēti N K L O ad segmentum P K L Q, ad rationem PNOQ ad IPQM, vt segmentum N K L O ad semiellipsim T: sed nota est proportio rationis N K L O ad P N O Q ad rationem P K L Q ad I P Q M per 10 huius: igitur nota est ratio segmenti N K L O, ad semiellipsim T. sed per 191 de ellipsi, nota est ratio semiellipsis T, ad semicirculum S: igitur & nota est ratio segmenti N K L O, ad semicirculum S, hoc est ad sectorem R K L, hoc est ad segmentum P K L Q. igitur & nota est ratio segmenti N K L O, ad residuum rectilineum P N O Q: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.



EXponantur iterum segmenta, I K L M, P K L Q, N K L O, cum sectore R K L: Iunganturque K L. Dico notam esse rationem sectoris R K L ad reliquum sectoris triangulum K R L.

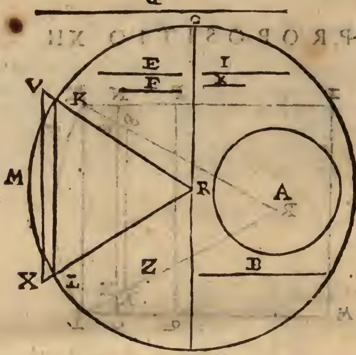
DVcatur recta ϑλ, paralela N O, vt rectilineum ϑVλX, sit æquale duobus triangulis N V K, O X L: erit igitur segmentum NKLO, æquale segmento ϑ K L λ: sed per præcedentem, nota est ratio segmēti N K L O, ad residuum P N O Q, igitur & nota est ratio segmenti ϑK L λ, ad rectilineum P N O Q: quia vero segmentum P K L Q, æquale positum est sectori R K L, & rectilineum ϑ V X λ, æquale duobus triangulis N V K, O X L, erit triangulum ϑR λ, æquale rectilineo P N O Q: igitur nota est ratio segmenti ϑK L λ, ad residuum triangulum ϑR λ: ergo & nota est ratio, segmenti ϑK L λ, vna cum triangulo ϑR λ, hoc est ratio sectoris R K L, ad triangulum R ϑλ: sed nota est ratio trianguli ϑR λ, ad triangulum R K L, igitur & nota est ratio, sectoris R K L, ad triangulum R K L. quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Dato Circulo æquale exhibere quadratum.

Constr. & Demonstr.



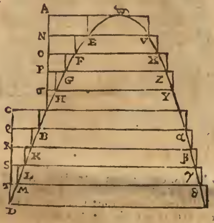
DAtus esto Circulus A cui quadratum oporteat exhibere æquale: exponatur ſector K L R, cuius ratio ad reſiduum ſectoris triangulum, per præcedentē, nota eſt. compleaturque circulus C M D, ſit autem ratio ſectoris K M L R ad K L R triangulum, ratio E ad F. ſi fiat vt F ad E ita triangulum K L R ad triangulum V R X, erit hoc æquale ſectori K M L R. quia vero nota eſt ratio ſectoris K M L R ad ſuum circulum, ex ſcholio lemm. 2, partis 2 huius, ſit illa ratio F ad G: igitur ſi fiat vt F ad G, ita triangulum V R X ad aliud triangulum Z, erit hoc æquale circulo C M D. nota autem eſt ratio circuli C M D ad circulum A, ſit illa ratio I ad K: ſi fiat vt I ad K ita triangulum Z ad quadratum B, erit hoc æquale circulo A &c. ſolutum igitur eſt problema Auſtriacum.

FINIS LIBRI TERTII.

TERTIA

TERTIA CIRCVLI QVADRATVRA

PROPOSITIO I.



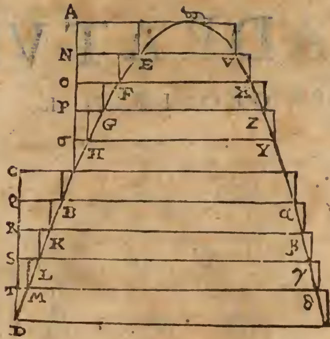
Sint AB,CD diametri duæ æquales,exterius applicatæ parabolæ EBD: quibus in æquales & æque multas partes diuisis,agantur per diuisionum puncta,normales, & compleantur rectangula AE, AV &c.

Dico paralelopipedum ex ductu AE in se,ad CB in se,esse vt Cα in se,ad AV in se:item NF in se,esse ad QK in se,vt Qβ in se, ad NX in se,& OG in se,ad RL,in se,sicut Rγ in se ad OZ in se: &c.

Demonstr.

Qvoniam altitudines paralelopipedorum ex AE in se & CB in se, Cα in se, AV in se,æquales sunt, eam inter se habebunt rationem, quæ inter bases illorum est;nimirum rectangula AE, CB, Cα, AV:

 sed



ſed per 80. lib. 10. oper. Geom. vt rectang. A E eſt ad C B, ita rectang. C α eſt ad AV, igitur vt paralelop. A E eſt ad C B, ita paral. C α eſt ad par. A V. ſimiliter oſtendam eſſe, vt par. N F ad Q K, ſic Q β ad N X, & vt O G ad R L, ſic R γ ad O Z: &c. quod erat demonſtrandum.

Hinc proportio rationis paralelop. A E ad C B, ad rationem C α ad A V, eadem eſt cum proportione rationis par. N F ad K Q, ad rationem Q β ad N X; & permutando, proportio rationis A E ad C B, ad rationem N F ad Q K, eadem eſt cum proportione rationis C α ad A V, ad rationem Q β ad N X & ſic deinceps.

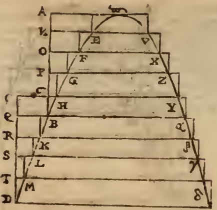
PROPOSITIO II.

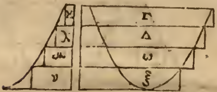
EAdem figurâ manente: ponantur figuræ AϖσH, CHTM, CAϖY: CYTδ ſubalternè cum ſuis rectangulis.

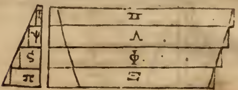
Dico rationem paralelop. ex AE in X, ad CB in Φ, eandem eſſe cum ratione Cα in Π, ad AV in Γ: & rationem NF in λ, ad QK in ψ, eandem eſſe cum ratione Qβ in Λ, ad NX in Δ: & ſic deinceps.

Demon-

Demonstratio.



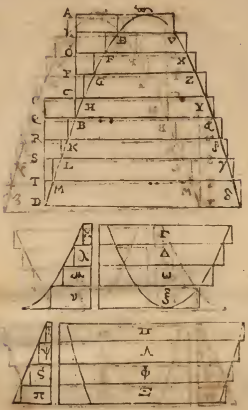




RAtio corporis ex A E in ϰ, ad C B in φ, componitur ex ratione rectanguli A E ad C B, & rectang. ϰ ad φ: item ratio corporis ex C α in Π, ad A V in Γ, componitur ex ratione rectanguli C α ad A V, (hoc est ex ratione A E ad C B) & ex ratione rectanguli Π ad Γ, (hoc est rectanguli ϰ ad φ) ratio igitur corporis ex A E in ϰ, ad C B in φ, ex iisdem componitur ex quibus composita est ratio corporis ex C α in Π, ad A V in Γ, igitur vt A E in ϰ, ad C B in φ, ita C α in Π, ad A V in Γ: similiter ostendetur esse vt N F in λ ad Q K in ψ, ita Q β in Δ ad N X in Δ & sic de cæteris quod erat demonstrandum.

Hinc proportio rationis ▭A E in ϰ, ad C B in φ, ad rationem C α in Π ad A V in Γ, eadem est cum proportione ▭A E ad C B ad rationem C α ad ▭A V, & permutando &c.

PROPOSITIO III.



EAdem manente figurâ.

Dico rationem ſolidi ex ductu mixtilinei A H in ſe ordinate ad ſolidum ex ductu CHTM in ſe ordinate eſſe ad rationem ſolidi ex ductu mixtilinei CTY in ſe ordinate ad ſolidum ex AY in ſe ordinate, ſicut ratio ſolidi ex A H in ſe ſubalterne ad ſol. ex CHTM in ſe ſubalterne eſt ad rationem ſolidi ex CTY in ſe ſubalterne ad ſol. ex AY in ſe ſubalterne.

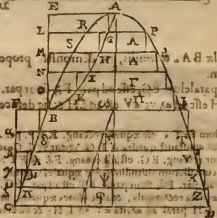
Demonſtratio omnino eadem eſt cum illa quæ propoſ. 3.

Quadratura ſecunda adhibita eſt.

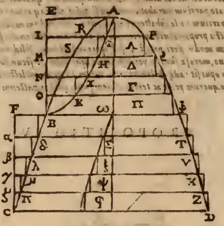
Ad Lectorem.

Hucusque per duas corporum proportiones progressi sumus, quarum singula, quatuor habent terminos diuersos: & prima quidem, quatuor constat solidis ex ductu ordinato partium parabolicarum in se ipsas, altera quatuor solidis ex ductu earundem partium in se subalternè natis: demonstrandum modo est, quâ methodo, ex prædictis proportionibus, circulus ad quadrum reducendus sit: atque id plurimis quidem modis fieri potest, sed quia reductiones solidorum quatuor ex ductu subalterno, morosæ sunt ac perdifficiles, eaque inter se secundum bases comparare, plenum opus sit tadij & laboris, rem totam, in gratiam lectoris, ad tres terminos reducam, quorum prior ac tertius, iidem sunt, quibus hactenus vsi, medius vero diuersus.

PROPOSITIO LV.



Sint EB, FC æquales diametri, exterius applicatæ parabolæ ABC; quibus in partes æque multas, & æquales diuisis, ducantur per diuisionum puncta normales, compleanturque rectangula vt prius: sint autem inter LR, LP, & inter MS, MQ mediæ proportionales LG, MH; & per BHG describatur parabola, cuius axis sit EB, & B vertex; transibit illa per A, & erit æqualis para-



lis parabolæ B A ₐ & similis, per demonstr. propos. 103. lib. 10. oper. Geom.

Dico 1. paralelop. EG, esse ad par. Fϑ, sicut par. FT, est ad EG. & LH esse ad αλ, vt αV est ad LH & sic deinceps.

Rectangulum ϑαT, est æquale rectang. R L P, per 45. de parab. hoc est per construct. quadrato L G, igitur vt L G ad αϑ, ita αT ad L G; igitur rectang. E G, est ad rectang. Fϑ, vt F T rectang. ad rectang. E G, cum illorum altitudines sint æquales: igitur etiam paralelop. E G est ad par. Fϑ, sicut paral. FT est ad par. E G, nam horum bases sunt prædicta rectangula, & altitudines æquales. similiter ostendam esse, vt L H paral. ad αλ, ita αV ad L H; & sic deinceps.

Sint iam rectang. Σ, ξ, ψ, Φ, eadem quæ Fϑ, αλ, βμ, γπ: sed subalternè posita:

Dico 2. rationem paralelop. ex EG in Λ, ad Fϑ in Σ, æqualem esse rationi paral. ex FT in ζD, ad EG in Λ. item LH in Δ, esse ad αλ in ξ, vt αV in γZ, ad LH in Δ: & sic de omnibus subalternis.

Demon-

Demonstratio eadem est cum secunda huius.

DIco 3. rationem solidi ex ductu EOKA in se ordinate ad solidum ex FBζπ in se ordinate, esse ad rationem solidi ex Fφζ Z in se ordinate ad solidum ex EOKA in se ordinate, sicut ratio solidi ex EOKA in se subalterne ad FBζπ in se subalterne, est ad rationem Fφζ Z in se subalterne ad EOKA in se subalterne.

Demonstratio eadem est cum tertia quadraturæ secundæ.

Lemma.

A C
B
D E

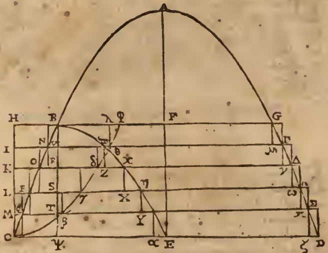
SI fuerit ratio AB ad rationem BC, vt ratio DB ad rationem BE; dico esse vt A ad D, ita E ad C. erit enim permutando, vt ratio AB ad rationem DB, ita ratio BC ad rationem BE; sed AB ratio est ad rationem DB vt A ad D per 2. de proport. & ratio BC est ad rationem BE, vt E ad C, per 7. eiusdem, igitur vt A ad D, ita E ad C.

Conuersa Lemmatis.

SI fuerit vt A ad D ita E ad C, & quæuis interponatur B, dico rationem AB esse ad rationem BC, vt DB ratio est ad rationem BE. est enim AB ratio ad rationem DB vt A ad D; & BC ratio ad rationem BE vt E ad C. cum igitur sit vt A ad D ita E ad C, erit AB ratio ad rationem DB, vt BC ratio ad rationem BE, & permutando, vt ratio AB ad rationem BC, ita ratio DB ad rationem BE.

PRO-

PROPOSITIO V.



HN	Hr	Qψ	Tζ
IO [in] I,		PT [in]	Sπ
KP	Kλ	OS	Rω
LQ	Lξ	NR	Vr

Diuiso AE axe parabolæ bifariam in F, ducantur per F & E normales BG, CD; quas in H & ψ, secent diametri CH, Bψ.

Dico rationem plani CHB ducti in se ordinatè, ad BAF, in se ordinatè, esse ad rationem BAF in se ordinatè, ad CHGD in se ordinatè, sicut ratio CBψ in se ordinatè, ad BAF in se ordinatè, est ad rationem B AF in se ordinatè ad ψBGD in se ordinatè.

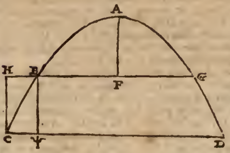
Demonstratio.

Fiant continuè proportionales H B, H φ, H G: & per C & φ describatur parabola, cuius axis sit C H, & vertex C; erit illa æqualis parabolæ B A F, per propos. 103. lib. 10. operis Geom. dein per B & E, describatur parabola ψ B E, cuius axis sit B ψ, vertex autem B. erit illa æqualis parabolæ H C φ, adeoque ipsi B A F, per eandem; tum H C lineâ diuisâ in partes quotcunque æquales, agantur per diuisionum puncta normales, compleanturque rectangula, H N, V λ, B μ, H r &c. quoniam rectæ HB, Hφ, HG, sunt continuè proportionales erunt IN, Iθ, Ir, item K O, K δ, K Δ continuè proportionales. & sic de cæteris per 167. de parab. igitur & rectangula H N, H θ, H r, sunt in continua analogia;

logia;item rectangula IO, Iδ, IΔ; item KP, Kγ, KΛ &c. igitur etiam paralelopipeda, orta ex ductu eorundem rectangulorum in ſeipſa ſunt in continua ratione, cum illorum altitudines ſint vtrobique æquales: rurſum per 275. de parabola, ſunt in continua proportione rectæ NV, Vπ, Vr; item OR, Rκ, RΔ, & ſic de reliquis: igitur & continuè proportionalia ſunt rectangula, NR, VZ, Vν; item OS, RX, Rω, &c. igitur etiam paralelopipeda, quorum baſes ſunt illa rectangula, ducta in eandem altitudinem IK, vel KL &c.

Sumantur iam rectangula duo, æqualiter à verticibus ſuarum parabolarum, quibus ſunt inſcripta, diſtantia, Iδ, & SY; erunt illa inter ſe æqualia, adeoque & paralelopipeda, ex ductu illorum in ſe ipſa nata, æqualia ſunt. eſt autem paral. Iδ, medium proportionale inter paralelop. IO & IΔ; paralelop. vero SY, medium eſt proportionale, inter paralelop. PT, Sπ; igitur per lemma præcedens, vt paral. IO eſt ad paral. PT, ita paralelop. Sπ, ad paral. IΔ: ſimiliter erit vt paralelop. KP ad paral. OS, ſic paral. Rω ad par. KΛ. item vt paralelop. HN, ad paral. QΨ, ita paral. Tζ ad par. HΓ. cum parabol. Hθ, æquale ſit paral. Tα &c. igitur par. HN. ductum in par. HΓ, æquatur par. QΨ ducto in par. Tζ. & paral. IO ductum in par. IΓ, æquatur par. QΨ ducto in par. Tζ: & par. IO ductum in paral. ιν, æquatur par. PT in par. Sπ: & par. KP, in par. KΛ, æquatur par. OS in par. Rω &c. igitur vt HN in HΓ, eſt ad QΨ in Tζ, ita IO in Iν, ad PT in Sπ: & vt IO in Iν, ad PT in Sπ, ita KP in KΛ, ad OS in Rω, igitur per 12.5. Euclidis, aggregatum ex HN in HΓ, IO in Iν, KP in KΛ LQ in LΣ eſt ad aggregatum ex QΨ in Tζ PT in Sπ, OS in Rω NR in Vν vt primum HN in HΓ ad QΨ in Tζ: ſed horum ratio eſt æqualitatis, igitur & ratio aggregatorum, æqualitatis eſt: quod cum ſemper fiat in omni ſubdiuiſione & inſcriptione in infinitum, patet aggregatum ex infinitis paralelop. inſcriptis ſolido ex CHB in ſe, ductis in infinita paralelop. inſcripta ſolido ex CHGD in ſe, æquari aggregato ex infinitis paralelopipedis inſcriptis ſolido ex CBΨ in ſe, ductis in infinita paralelop. inſcripta ſolido ex ductu ΨBGD in ſe: igitur ſolidum ex CHB in ſe, ductum in ſolidum ex CHGD in ſe, æquatur ſolido ex CBΨ in ſe, ducto in ſolidum ex ΨBGD in ſe. igitur per 85. de proport. ſolidum ex CHB in ſe, eſt ad ſolidum ex CBΨ in ſe, vt ſolidum ex ΨBGD in ſe, ad ſolidum ex CHGD in ſe. igitur per conuerſam lemmatis præcedentis, ratio ſolidi ex CHB in ſe, ad ſolidum ex BAF in ſe, eſt ad rationem ſolidi ex BAF in ſe, ad ſolidum ex CHGD in ſe, vt ratio ſolidi ex CBΨ in ſe, ad BBF in ſe, eſt ad rationem ſolidi ex BAF in ſe, ad ſolidum ex ΨBCD in ſe. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.



Iisdem positis.

Dico rationem CHB in se subalternè, ad BAF in se subalternè, esse ad rationem BAF in se subalternè, ad CHGD in se subalternè, vt ratio CBΨ in se subalternè, ad BAF in se subalternè, est ad rationem BAF in se subalternè, ad ΨBGD in se subalternè.

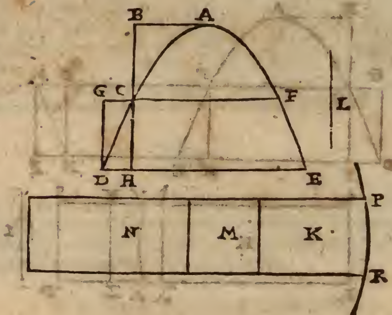
Demonstratio.

VT ratio CHB in se ordinatè, ad BAF in se ordinatè, est ad rationē BAF in se ordinatè, ad CHGD in se ordinatè, ita ratio CHB in se subalternè, ad BAF in se subalternè est ad rationē BAF in se subalternè ad CHGD in se subalternè, per assert. 3. prop. 4. huius. est autē per 3. lib. 3. huius, vt ratio CBΨ in se ordinatè, ad BAF in se ordinatè, ad rationē BAF in se ordinatè, ad ΨPGD in se ordinatè, ita ratio CBΨ in se subalternè, ad BAF in se subalternè, ad rationem BAF in se subalternè, ad ΨBGD in se subalternè: igitur vt proportio rationis CHB in se ordinatè, ad BAF in se ordinatè, ad rationem BAF in se ordinatè, ad CHGD in se ordinatè, est ad proportionem rationis CBΨ in se ordinatè, ad BAF in se ordinatè, ad rationem BAF in se ordinatè, ad ΨBGD in se ordinatè, ita proportio rationis CHB in se subalternè, ad BAF in se subalternè, ad rationem BAF in se subalternè, ad CHGD in se subalternè, est ad proportionem rationis CBΨ in se subalternè, ad BAF in se subalternè, ad rationem BAF in se subalternè, ad ΨBGD in se subalternè: sed per præcedentem, duæ proportiones rationum, quæ existunt inter solida ex ductu ordinato orta, sunt inter se æquales, igitur & duæ reliquæ proportiones rationum, inter solida ex subalterno ductu nata, æquales sunt. quod erat demonstrandum.

Hinc sequitur, per lemma præcedentis propositionis, CHB in se subalternè, esse ad CBΨ in se subalternè sicut ΨBGD *in se subalternè, est ad CHGD in se subalternè.*

PRO-

PROPOSITIO VII.



SInt BC, GD diametri æquales, exterius applicatæ parabolæ ADE, ducanturque normales GCF, DE, & BA contingens, paralela GF.

Oporteat solidum ex DGFE in se subalternè dare corpus æquale determinatam habens basim & altitudinem notam.

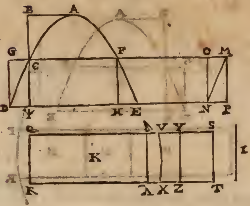
Constr. & Demonstr.

DIameter BC producta occurrat DE lineæ in H. Per 199. de ductibus, planum DGFE in se subaltern: æquatur plano HCFE in se subalternè, vna cum plano DGCH in se, & plano HCFE bis in planum GCDH. plano autem HCFE in se subalternè; per 6. l. 3. huius, æquatur segmentum circulare K, ductum in determinatam altitudinem L, apponatur segmento K rectangulum M; quod ductum in altitudinem L, sit æquale rectangulo GCDH ducto in se. item cum quadrata sit parabola HCFE, si rectangulum illi æquale, intelligatur duci in duplam altitudinem GC, erit hoc solidum æquale parabolæ HCFE bis ductæ in rectangulum GCDH: fiat igitur rectangulum N, quod ductum in altitudinem L, sit æquale solido ex HCFE bis ducto in rectang. GCDH, quod fieri ex elementis potest; cum solidum illud sit paralelopipedum notam habens basim & altitudinem: totum igitur planum NMK ductum in altitudinem L, est æquale plano DGFE ducto in se subalternè.

Hinc patet solidum ex HCFE in se subalternè & solidum ex DGFE in se subalternè, reducta esse ad partes cylindricas eandem habentes altitudinem L, & bases quas idem arcus circularis PR, subtendit seu terminat.

PRO-

PROPOSITIO VIII.



EAdem positâ figurâ, oporteat solido ex DGC in se subalternè æquale exhibere corpus, notam habens altitudinem & basim determinatam.

Constructio & Demonstratio.

PRoducatur CF in M, & DE in N, vt pars HFMN sit æqualis, & subalternè posita ipsi HFCD, ducanturque NO, MP paralelæ FH. & segmentum circulare K ductum in altitudinem L, sit æquale DCFH in se subalternè, hoc est DCFH in FHMN. & quoniam pars parabolica HFMN quadrata est, rectangulum DGFH ductum in HFMN producit notum paralelopipedum, cui fiat æquale rectangulum RQST in altitudinem L: patet ST rectam cadere extra segmentum circulare K, cum DGFH in FHMN, maius sit quam DCFH in FHMN, adeoque & QRST in L, maius segmento K; sitne QRVX in L, cum igitur DCFH in FHMN, sit QRVX in L, & DGFH in FHMN, sit QRST in L, erit DGC in HFMN, æquale concauo VSTX in L. rursum quoniam quadrata est pars parabolica DGC, hæc ducta in rectangulum FHON, notum producit paralelopipedum; cui fiat æquale rectangulum STYZ in altitudinem L, patet rectam YZ cadere extra segmentum circulare: quia cum DGC in FHMN, maius sit quam DGC in FHON; ipsi vero DGC in FHMN sit æquale VSTX in L, & ipsi DGC in FHON æquale sit SYTZ in L, erit SYTZ minus SVTX: cum igitur DGC in HFMN sit æquale VSTX in L, & DGC in HFON sit æquale SYTZ in L, patet residuum VYZX in L, æquari DGC in ONM. iterum cum DGC parabola sit quadrata, hæc ducta in rectangulum OMPN

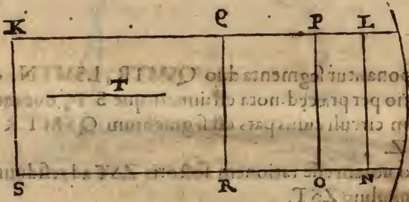
 notum

notum producit paralelopipedum, cui fiat æquale rectangulum Y Z δ λ in altitudinem L: patet δ λ cadere intra segmentum circulare: nam cum D G C in O M P N, maius sit quam D G C, in O M N, sit autem D G C in O M N æquale V Y Z X in L, & ipsi D G C in O M N P æquale sit δ Y Z λ in L, patet δ Y Z λ, maius esse V Y Z X, adeoque δ λ cadere intra segmentum. igitur si ab D G C in O M P N, hoc est ab δ Y Z λ in L, auferatur D G C in O N M, hoc est V Y Z X in L; erit segmentum reliquum δ V X λ in L, æquale reliquo D G C in N M P, hoc est D G C in se subalternè; igitur &c. quod erat faciendum.

Coroll.

HInc patet partem D G C in se subalternè, reductam esse ad solidum cylindricum eandem habens altitudinem, cum parte D C F H in se subalternè, & ad cylindricum reducta; & basim quæ pars sit segmenti K quod basis est partis D C F H reductæ.

PROPOSITIO IX.



ESto segmentum K S N M L K ductum in altitudinem T, æquale solido ex ductu D G F E (vid. fig. præc.) in se subalternè per 7. huius. & segmentum Q L M N R in altitudinem T æquale ΨC F E in se subalternè, segmentum vero L M N in altitudinem T, æquale D G C in se subalternè.

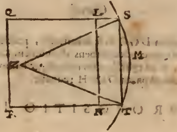
Dico notam esse rationem segmenti L M N ad segmentum Q L M N R.

Demonstratio.

QVoniam planum D C Ψ (vid. fig. præc.) in se subalternè, reductum est ad solidum cylindricum, cuius altitudo est T, & basis est pars segmenti Q L M N R per propos. 6. lib. 3. eiusque coroll. esto P M O segmentum illud. igitur per 6. huius, eiusque corollar. erit vt L M N se-

gmentum ad ſegmentum P M O, ita ſegmentum Q M R ad ſegmentum K L M N S. & diuidendo vt L M N ſegmentum ad rectangulum P L O N, ita ſegmentum Q M R ad rectangulum K Q R S. igitur permutando erit L M N ſegmentum ad ſegmentum Q M R vt rectangulum P L N O ad rectang. K Q R S. ſed horum ratio nota eſt, igitur & illorum, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.



EXponantur ſegmenta duo QSMTR, LSMTN, quorum ratio per præced. nota eſt: iunctiſque S T, ducantur ad Z centrum circuli cuius pars eſt ſegmentum Q S M T R, rectæ SZ, TZ.

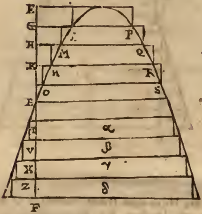
Dico notam eſſe rationem ſectoris ZST ad reſiduum ſectoris triangulum ZST.

Demonſtratio.

PEr præced. nota eſt ratio ſegmenti LSMTN ad ſegmentũ QSMTR; igitur & nota eſt ratio ſegmenti L S M T N ad reſiduum rectangulum L Q R N; ſed nota eſt ratio rectanguli LSNT ad rectang. LQRN, nota igitur eſt ratio ſegmenti L S M T N ad rectang. L S N T igitur etiam nota eſt ratio ſegmenti LSMTN ad ſegmentum SMT, & ratio ſegmenti SMT ad rectangulum L S N T. ſed nota eſt ratio rectanguli L S N T ad triangulum Z S T, igitur nota eſt ratio ſegmenti SMT ad triangulum Z S T. igitur nota eſt ratio ſectoris Z S M T ad triangulum Z S T; quod erat demonſtrandum.

QVARTA CIRCVLI QVADRATVRA.

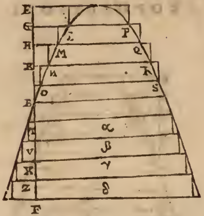
PROPOSITIO I.



ESto EF diameter quæcunque, secans parabolam in B, factisque EB, BF æqualibus, diuidantur EB, BF in partes æque multas & æquales, ac ductis per diuisionum puncta normalibus, compleantur rectangula:

Dico paralelopip. KO esse ad paral. T, vt par. α est ad paral. KS. item HN esse ad V, vt β est ad HR; & GM esse ad X, vt γ est ad GQ, denique & EL esse ad Z, vt δ est ad EP.

Demonstr.



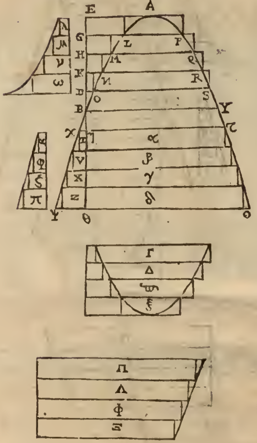
PEr propos. 104. lib. 10. oper. Geom. rectang. K O est ad rectang. T, vt rectang. α est ad rectang. K S. sed paralelop. K O est ad paral T, vt rectang K O ad rectang. T, cum hæc, illorum sint bases, altitudines autem vtrobique sint æquales; & paral. α est ad paral. K S vt rectang. α ad rectang. K S; igitur paral. K O est ad paral. T, vt paral. α est ad paral. K S. similiter ostenditur esse paral H N ad paral. V, vt paral. β est ad paral. H R, & sic deinceps; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

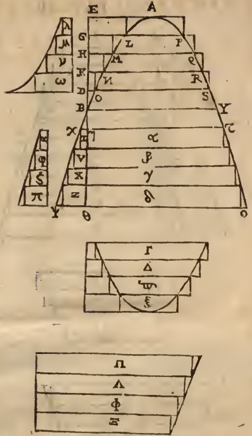
HInc proportio rationis paral. K O ad T, ad rationem α ad K S, eadem est, cum proportione rationis H N ad V, ad rationem β ad H R; & permutando, proportio rationis K O ad T, ad rationem H N ad V, eadem est cum proportione rationis α ad K S, ad rationem β ad H R. & sic deinceps.

PRO-

PROPOSITIO II.



EAdem figurâ positâ, ponantur subalternè partes parabolicæ BEA, BEAY, [illegible] cum rectangulis suis inscriptis.



Dico planum K O ductum in ω, ad planum T ductum in κ, eandem habere rationem, quam habet planum α ductum in π, ad planum K S ductum in ξ. item H N in ν, esse ad V in φ, vt β in λ, ad H R in ϖ, & sic de cęteris.

Demon-

Demonstr.

Ratio plani KO in ω, ad planum T in $\varkappa$, componitur ex ratione rectang. KO ad rectang. T, & ex ratione rectanguli ω ad rectang. $\varkappa$, hoc est EL ad Z: similiter ratio α in Π, ad KS in ξ, componitur ex ratione rectang. α ad rectang. KS, & ex ratione rectang. Π ad rectang. ξ, hoc est δ ad EP: sed ratio rectang. KO ad T, eadem est cum ratione α ad KS, & ratio rectang. EL ad Z, eadem est cum ratione rectang. δ ad EP, igitur ratio KO in ω ad T in $\varkappa$, componitur ex iisdem rationibus, ex quibus componitur ratio α in Π ad KS in ξ. igitur KO in ω, est ad T in $\varkappa$, vt α in Π ad KS in ξ: similiter ostendetur esse HN in ν, ad V in φ, vt β in Λ, ad HR in ϖ: & sic deinceps. quod erat demonstrandum.

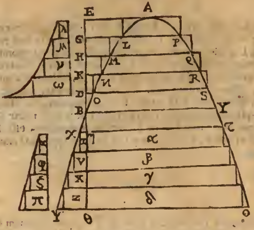
Coroll. I.

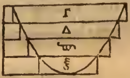
Hinc proportio rationis KO in ω, ad T in $\varkappa$, ad rationem α in Π ad KS in ξ, eadem est cum proportione rationis HN in ν ad V in φ, ad rationem β in Λ ad HR in ϖ: & permutando, proportio rationis KO in ω ad T in $\varkappa$, ad rationem HN in ν ad V in φ, eadem est cum proportione rationis α in Π ad KS in ξ, ad rationem β in Λ ad HR in ϖ. & sic deinceps.

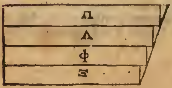
Coroll. II.

Sequitur secundo, proportionem rationis Ko ad T ad rationem α ad KS, eandem esse cum proportione rationis KO in ω ad T in $\varkappa$, ad rationem α in Π ad KS in ξ. & sic de cæteris.

PROPOSITIO III.







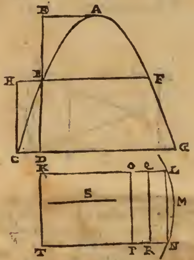
Eadem figurâ poſitâ:

Dico rationem ſolidi ex D E A O in ſe ordinatè, ad ſolidum ex χνψθ in ſe ordinatè, eſſe ad rationem ſolidi ex θηζο in ſe ordinatè, ad ſolidnm ex D E A S in ſe ordinatè, ſicut ratio ſolidi

lidi ex DEAO in ſe ſubalternè, ad ſolidum ex χηψθ in ſe ſubalternè, eſt ad rationem ſolidi ex θηζθ in ſe ſubalternè ad, ſolidum ex DEAS in ſe ſubalternè.

Demonſtratio eadem eſt quæ propoſitionis tertiæ, quadraturæ ſecundæ.

PROPOSITIO IV.



Sint iterùm vt prius diametri duæ æquales EB, BD, actiſq; per earum extremitates normalibus BF, CDG;

Dico notam eſſe rationem CBD in ſe ſubalternè, ad DBFG in ſe ſubalternè.

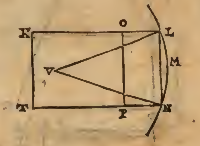
Demonſtratio.

Ponatur ſegmentum circulare KLMNT, quod ductum in altitudinem S, ſit æquale parti DBFG in ſe ſubalternè, per prop. 8. lib. 3. huius. item ſegmentum OLMNP, quod ductum in eandem altitudinem S, ſit æquale parti CBD in ſe ſubalternè, per eandem propoſ. erit igitur vt ſegmentum OLMNP, ad ſegmentum KLMNT, ita CBD in ſe ſubalternè, ad DBFG in ſe ſubalternè. erigatur iam ex C diameter CH, occurrens FB productæ in H. ponaturque per 8. quad. tertiæ huius, ſegmentum QLMNR, quod ductum in altitudinem S, ſit æ-

 quale

quale C H B in se subalternè. quoniam igitur per 10. quadr. tertiæ, nota est ratio segmenti Q L M N R ad segmentum K L M N T. nota etiam est ratio segmenti Q L M N R ad residuum rectangulum K Q R T; est nota insuper ratio rectanguli K Q R T, ad rectangulum O Q R P, nota igitur est ratio segmenti Q L M N R, ad rectangulum O Q R P, igitur & nota est ratio segmenti O L M N P ad rectangulum O Q R P, adeoque etiam ad segmentum Q L M N R. sed nota est ratio segmenti Q L M N R ad segmētum K L M N T per 1. quadr. 3. igitur nota est ratio segmenti O L M N P ad segmentum K L M N T, hoc est, C B D in se subalternè, ad D B F G in se subalternè. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.



Exponantur segmenta duo K L N T, O L M N P, quorum nota est facta ratio in propos. præced. iunctisque L, N, ducantur ad V centrum circuli, rectæ L V, N V.

Dico notam esse rationem sectoris V L M N, ad residuum triangulum L V N.

Demonstratio.

Per præced. nota est ratio segmenti O L M N P, ad segmentum K L M N T, igitur nota est ratio segmenti O L M N P ad residuum rectangulum K O P T; sed ratio huius, ad rectang. O L N P nota est, igitur nota est ratio segmenti O L M N P ad rectangulum O L N P; adeoque & ratio segmenti L M N ad rectang. O L N P. at nota est ratio rectang. O L N P ad triangulum L V N, igitur & nota est ratio segmenti L M N ad triangulum L V N, igitur etiam nota est ratio sectoris V L M N ad triangulum L V N. quod erat demonstr.

F I N I S.